COLECCIÓN DIDÁCTICA

LUIS MIGUEL CABRERA
DAVID JULIAN MOLINA BELTRAN
GABRIEL VILLALOBOS CAMARGO

Matemáticas I

Precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas

Escuela Superior de Administración Pública
AÑOS DE FUTURO
25 Años
Escuela de Alto Gobierno

EDITORES DE LA COLECCIÓN

Jesús María Molina Giraldo

Marcela Castañeda González

Matemáticas I

Catalogación en la fuente – Grupo Biblioteca y CDIM 2024

Cabrera González, Luis Miguel

Matemática I : precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas / Luis Miguel Cabrera González, David Julian Molina Beltran y Gabriel Villalobos Camargo : Bogotá : Escuela Superior de Administración Pública-ESAP, 2024.

244 páginas: figuras, tablas. -- (Colección Didáctica)

ISBN 978-958-609-161-9 (papel). -- ISBN 978-958-609-162-6 (electrónico)

1. Matemáticas para administradores 2. Matemáticas para economistas 3 Cálculo diferencial I. Molina Beltran, David Julián II. Villalobos Camargo, Gabriel III. Título IV Serie

CDD-21:510

Matemáticas I. : Precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas

Luis Miguel Cabrera, David Julian Molina Beltran y Gabriel Villalobos Camargo, autores

Facultad de Pregrados

Colección Didáctica

ISBN 978-958-609-161-9 (papel)

ISBN 978-958-609-162-6 (electrónico)

2024

Director Nacional: Jorge Iván Bula

Subdirección Nacional de Servicios Académicos

Grupo de Publicaciones

Editorial ESAP

grupo.publicaciones@esap.edu.co

https://www.esap.edu.co/

https://libros.esap.edu.co/

https://revistas.esap.edu.co/

Coordinación editorial Óscar A. Chacón Gómez

Corrección de estilo Íkaro Valderrama

Cubierta y preliminares Diego Mesa

Escuela Superior de Administración Pública (ESAP)

Grupo Publicaciones. Calle 44 #53-37, Bogotá, D. C.

(+57) 601 795 6110

Hecho en Bogotá, D. C., Colombia, 2024

Matemáticas I

Precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas

LUIS MIGUEL CABRERA

DAVID JULIAN MOLINA BELTRAN

GABRIEL VILLALOBOS CAMARGO

Escuela Superior de Administración Pública

AÑOS DE FUTURO

25 Años | Escuela de Alto Gobierno

Matemáticas I es un empeño de la Facultad de Pregrados de la Escuela Superior de Administración Pública (esap) y del programa Administración Pública Territorial, fruto de los diálogos y aportes de los docentes universitarios que respaldaron la propuesta de renovación curricular y escritura de libros de texto universitario, desarrollados entre el 2017 y el 2023.

Contenido

Presentación **17**

1 Precálculo y funciones **21**

1.1 Concepto de función 24
1.2 Función constante 28
1.3 Función afín y función lineal 33
1.4 Función cuadrática 43
1.5 Función exponencial y función logarítmica 52

2 Infinito, límites y continuidad **57**

2.1 El infinito 57
2.2 Métodos de calcular y estimar límites 66
2.3 Asíntotas, continuidad, límites infinitos y en el infinito . 80

3 La derivada **105**

3.1 Incremento y razón media de cambio 106
3.2 Derivada 115
3.3 Derivada como una función 118
3.4 Regla para calcular la derivada de una potencia 123
3.5 Derivadas de productos y cocientes 128
3.6 Regla de la cadena 129
3.7 Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales . 131

4 Aplicaciones de las derivadas **141**

4.1 Derivadas aplicadas al movimiento y CAS 142
4.2 Aplicaciones a linealización y estimación 164
4.3 Modelado mediante diferenciales y razones de cambio en economía 183
4.4 Derivada, máximos y mínimos 198

4.5 Aplicaciones en aprendizaje de máquina y métodos numéricos 214
4.6 Optimización 221

Referencias **234**

Sobre los autores **239**

Créditos de tablas y figuras **241**

Lista de figuras

1 Mapa conceptual de los temas de *Matemáticas I* 18

1.1 Ejes temáticos del "Capítulo 1" 21
1.2 Clasificación de variables 22
1.3 Esquema números reales 23
1.4 Recta real 23
1.5 Situación inicial 24
1.6 Situación conjunto 24
1.7 Relaciones de conjunto 24
1.8 Relaciones de conjunto 25
1.9 Caso 1: relación salario 25
1.10 Caso 2: relación salario 25
1.11 Caso 3: relación salario 25
1.12 Representación sagital 26
1.13 La imagen de x bajo la función f es y 27
1.14 Plano cartesiano 27
1.15 Dominio y codominio 28
1.16 Representación sagital. Dominio y codominio 28
1.17 Gráfica $f(x) = 3$ 29
1.18 El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$ 30
1.19 Representación del intervalo $[a, b)$ en la recta real, $\mathbb{R}$ 30
1.20 Función constante. 30
1.21 Función constante 31
1.22 Función afín y función lineal 34
1.23 Definición función lineal 35
1.24 Definición función lineal 35
1.25 Interpretación de modelos 36
1.26 Interpretación de modelos 36
1.27 Gráfica interpretación de modelos 36
1.28 Modelo matemático función lineal 37

1.29 Modelo matemático $y = f(x) = mx + b$, función afín 37
1.30 Recta interactiva GeoGebra 38
1.31 Ejemplo. Ecuación de demanda 39
1.32 Gráfica ecuación de demanda 39
1.33 Gráfica ecuación de demanda 40
1.34 Gráfica de la función obtenida 40
1.35 Modelo matemático ecuación de oferta para la función afín o lineal 41
1.36 Modelo matemático ecuación de la recta 42
1.37 Características del modelo matemático ecuación oferta 42
1.38 Características del modelo matemático ecuación oferta 42
1.39 Una posible función w, con variable independiente ν 43
1.40 w es una función constante 44
1.41 w es función lineal de ν 44
1.42 w es función cuadrática de ν 44
1.43 Gráfica de la función cuadrática 44
1.44 Función cuadrática con máximo indefinido o indeterminado . 46
1.45 Gráfica de la función ingreso aplicación, función cuadrática . 47
1.46 Modelo matemático 48
1.47 Función producto monopolista, ecuación de demanda 49
1.48 Función exponencial $f(x) = 2^x$ 52
1.49 Función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 52
1.50 Función logarítmica $f(x) = \log_2(x)$ 53
1.51 Función logarítmica $f(x) = \log_{1/2}(x)$ 53
1.52 Las funciones: 2^x en línea discontinua, y $\log_2(x)$ en línea continua 53
1.53 Ejemplos de aplicación funciones logarítmicas 54
1.54 Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas 54
1.55 Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas 54
1.56 Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas 55

2.1 Prueba de la pizza, 4 cortes 58
2.2 Prueba de la pizza, 8 cortes 58
2.3 Ejemplo, función definida a trozos 58
2.4 Límite de una función definida en un intervalo 61
2.5 Función f, referenciada en el ejercicio 2.1.4.2 62
2.6 Ejercicio 2.1.4.5, límites 64
2.7 Función utilizada en el ejercicio 2.1.4.6, límites 64
2.8 Ejercicio 2.1.4.8, límites 65
2.9 Función utilizada en el ejercicio 2.1.4.9, límites 65

2.10 Funciones $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 2x + 3$ 66
2.11 Límite *estimado* por tabla y gráfica 67
2.12 Indeterminación de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ en 1 70
2.13 Gráfica, en cercanías de 0 de las funciones: $f(x) = \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7}$, línea continua; y $g(x) = 1/3$, línea cortada 80
2.14 Representación gráfica de la función $f(x) = \left(10x - \frac{5}{(x-4)^2}\right)$, para calcular $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ 82
2.15 Límite infinito $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.16 Límite en menos infinito $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.17 Límite infinito por la izquierda $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.18 Límite infinito por la derecha $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.19 Límite a menos infinito por la izquierda $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.20 Límite a menos infinito por la derecha $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$ 84
2.21 La función es discontinua en $a = 0$ porque el límite no existe . 85
2.22 La función es discontinua en a porque el valor del límite es diferente al valor funcional 85
2.23 La función es discontinua en a porque no está definida allí . . 85
2.24 La función es discontinua porque el límite en a no existe y porque no está definida allí 85
2.25 Discontinuidad en el punto $(0, 2)$ 86
2.26 Función continua en $\mathbb{R}$ 86
2.27 Función continua en su dominio 87
2.28 Función discontinua 87
2.29 La representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ 88
2.30 Función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ 94
2.31 Ejercicio 2.3.8.4 96
2.32 Ejercicio 2.3.8.8, continuidad 97
2.33 Ejercicio 2.3.8.10, gráfica de continuidad 98

3.1 La derivada 105
3.2 Variación de precios del dólar en 2021 y hasta julio de 2022 . 106
3.3 Precio de maíz por hectárea cultivada 108
3.4 Valor de acciones de Nutresa 109

3.5 Función arbitraria en la que se muestra las variaciones en la variable dependiente e independiente. 110
3.6 tiempo y recaudo 112
3.7 Consumo de tetraciclinas en algunos países europeos 115
3.8 Precio de insumo en USD en los meses del año 115
3.9 Gráfica de datos de la tabla. Se busca calcular de forma automática las pendientes de rectas que unen los puntos marcados en la figura 115
3.10 Función f(x) su derivada en $a = 2$ 117
3.11 Dado que las derivadas unilaterales no son iguales la derivada en $a = 0$ no existe 118
3.12 La secante cambia mientras Δx tiende a cero, transformando la secante en una tangente 119
3.13 Gráfica de la función lineal $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ 121
3.14 Función $f(x) = x^2$ con las rectas tangentes 123
3.15 Función I(t) 126
3.16 Función P(x) y su recta tangente en t=2 128
3.17 Valor del índice S&P 500 desde febrero 1970 hasta agosto 2022 132
3.18 Gráfica de los valores encontrados en la tabla 3.3. Se observa que, en efecto, el límite existe y que tiende al valor ln $2 = 0.6931$132

4.1 GeoGebra: el menú "Vista" permite personalizar la forma como se ve y funciona el programa 146
4.2 GeoGebra, función $f(x) = (3x^2 + 1) \sin x$ 147
4.3 Ingreso de funciones 147
4.4 La expresión no se definió como una función en la lógica de GeoGebra 147
4.5 La expresión se definió como una función en la lógica de GeoGebra 148
4.6 "Vista Gráfica" en GeoGebra 148
4.7 GeoGebra CAS Calculator en Google Play Store 149
4.8 Pantalla inicial de la app, señalando el teclado numérico (izq.); se selecciona el teclado alfanumérico, para ingresar el nombre de la función (der.) 149
4.9 Se alterna entre los diferentes teclados para escribir f 149
4.10 Se alterna entre los diferentes teclados para escribir f 150
4.11 Texto completo de la función 150
4.12 Comando derivada 151
4.13 Expresión definida en una Celda 151
4.14 "Vista Gráfica" en GeoGebra para el computador 151

4.15 Seleccionar la función en GeoGebra para el computador . . . 152
4.16 Estilo de trazo 152
4.17 Desplaza vista gráfica 153
4.18 Intervalo de visualización 153
4.19 GeoGebra operador derivada 154
4.20 Derivada en GeoGebra 154
4.21 Menú numérico de GeoGebra 154
4.22 Calcular la derivada en GeoGebra 155
4.23 Calcular la derivada en GeoGebra 155
4.24 Representación de la linealización. La línea continua representa la función f, la línea discontinua la función linealización L 164
4.25 x^2 y su tangente en el punto $x = 1$: $2x - 1$ 165
4.26 x^2 y su tangente en el punto $x = 1$: $2x - 1$, acercamiento . . 165
4.27 Función $\sin x$ y su aproximación lineal cerca a 0, la función x 167
4.28 Diagrama de cuerpo libre del péndulo 167
4.29 Función $e^x \sin x$ y su linealización cerca a π, la función $L(x) = -23.14(x - \pi)$ 168
4.30 Una función arbitraria f 169
4.31 Δf y Δx, para una función f 169
4.32 Valor real del cambio en la función representado por Δf; y su aproximación, el diferencial $(b - a)f'(a)$ 170
4.33 Ejercicio 4.2.6.4, linealización 177
4.34 Linealización, ejercicio 4.2.6.4 177
4.35 Representación de una derivada f', para el ejercicio 4.2.6.9 . 179
4.36 Posición de Bolt como función del tiempo 189
4.37 Velocidad de Bolt como función del tiempo 189
4.38 Ejercicio 4.3.8.8, modelos lineal, cuadrático, sinusoidal y exponencial 192
4.39 Ejercicio 4.3.8.9, dos modelos 193
4.40 Ejercicio 4.3.8.10, derivada de dos modelos 193
4.41 Ejercicio 4.3.8.11, modelos de derivada 194
4.42 Ejercicio 4.3.8.12, velocidad de un objeto 194
4.43 Función f con máximos relativos en c,e,b; y mínimos relativos en a,d,k 198
4.44 Extremos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ con $-1 \leq x \leq 4$ 199
4.45 Candidatos a máximos y mínimos de la función f 200
4.46 Función $f(x) = x^3 - 12x$ y su derivada f' 201
4.47 Función $f(x) = \frac{3}{2}(x - 1)^{2/3}$ y su derivada $f'(x)$ 201

4.48 Función $f(x) = 1/x$, con dominio $[1, \infty)$ 202
4.49 Ejemplo de un máximo local 202
4.50 Ejemplo de un mínimo local 203
4.51 Valor crítico que no es máximo ni mínimo 203
4.52 Diagrama de "cementerio" de $h(x) = 2 + 2x^2 - x^3$ 203
4.53 Ejercicio 4.4.2.9, derivada f' 206
4.54 Ejercicio 4.4.2.10 206
4.55 Función cóncava hacia arriba 208
4.56 Función cóncava hacia abajo 208
4.57 Función f relacionada con el ejercicio 4.4.3.10 211
4.58 Derivada f' relacionada con el ejercicio 4.4.3.11 211
4.59 Diagrama de flujo del aprendizaje de máquina 216
4.60 Datos de entrenamiento, son parejas (x, y) representadas aquí como puntos en el plano 216
4.61 Cuatro hipótesis correspondientes a la relación entre x y y . . 216
4.62 Valor de la función costo correspondiente a cada una de las hipótesis 217
4.63 20 diferentes hipótesis que representan la relación entre x y y 217
4.64 Costos correspondientes a las hipótesis representadas en la figura 4.63 217
4.65 Inicio del proceso de linealización por Newton-Raphson . . . 218
4.66 Linealización de la función en $(x_0, f(x_0))$, la recta $L_0(x)$ . . . 218
4.67 Iteración del método Newton-Raphson 218
4.68 Función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ 220
4.69 Diagrama de la caja correspondiente al ejemplo 4.6.1.6. La longitud x es desconocida 222
4.70 Construcción de la caja 223
4.71 Al definir el lado del cuadrado que se corta de las esquinas con el valor de x, la base cuadrada de la caja ahora tiene lado $12 - 2x$, como se ve aquí 223
4.72 Función V, su derivada V', y su segunda derivada V'' 224
4.73 Caja sin tapa correspondiente al ejercicio 4.6.1.8 226
4.74 Diagrama que representa las variables del ejercicio del cartel . 228

Lista de tablas

1.1 Representación tabular 27
1.2 Representación tabular 27
1.3 Función $f(x) = 3$ 29
1.4 Relaciones funcionales 33
1.5 Relaciones funcionales 34
1.6 Desarrollo de las respuestas a las preguntas planteadas en el enunciado del ejemplo 1.3.5.1 41
1.7 Gráfica tipos de parábolas (función cuadrática) 45
1.8 Función exponencial 52
1.9 Función logarítmica 53
1.10 Propiedades de las funciones logarítmicas 53

2.1 Algunos valores de la función representada en la figura 2.3 . . 59
2.2 Representación de algunos valores de la figura 2.3 59
2.3 Algunos valores de $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 2x + 3$. 66
2.4 Valores de $f(x) = x$ cerca a -4 67
2.5 Algunos valores de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ cercanos a 1 70
2.7 Algunos valores de la función $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ 71
2.8 Algunos valores de x cerca a 5, para solucionar el ejercicio 2.2.3.6 72
2.9 Valores de x relacionados con el ejercicio 2.2.3.19 77
2.10 Valores de x relacionados con el ejercicio 2.2.3.20 78
2.11 Algunos valores de la función $f(x) = \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7}$ 80
2.12 Algunos valores de la función $f(x) = 1/x^2$ 81
2.13 Valores de la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ cerca al número 2 88

3.1 Datos asociados a la función $f(x) = x^2$ 115
3.2 Tabla de derivadas. Se observa el patrón de una función potencia de x 123
3.3 Valores de la función $g(\Delta x)$. Se observa que cuando Δx tiende a cero la función $g(x)$ tiende a $\ln 2 = 0.6931$ 132

3.4 Complete la tabla siguiendo la secuencia propuesta 140

4.1 Datos del ejercicio 4.2.6.10 179
4.2 Definiciones de densidad lineal, superficial y volumétrica . . 181
4.3 Datos correspondientes a un modelo exponencial discreto . . 187
4.4 Algunos valores del ejercicio 4.3.8.20 197
4.5 Ceros de la función $x^3 - 2x - 5 = 0$ utilizando el método de Newton. Se obtiene el valor $a = 2.09455148$, con 9 cifras significativas 220

Presentación

Luis Miguel Cabrera González
David Julian Molina Beltran
Gabriel Villalobos Camargo

Estimada comunidad esapista:

El conocimiento, en cuanto motor de desarrollo y bienestar, es un activo que juega un papel importante en las sociedades; por ello es necesario investigar y desarrollar estrategias que posibiliten la solución de problemas, así como los procesos de innovación que agreguen valor público y apunten a fortalecer la economía, la educación y la apropiación de tecnología.

La Administración Pública se fortalece con el aporte de varias disciplinas, pero en particular la tecnología, la matemática y la estadística ofrecen estrategias y herramientas que posibilitan cuantificar, modelar, simular, evaluar y tomar decisiones sustentadas en los datos y en el comportamiento de variables.

Las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) posibilitan analizar grandes volúmenes de información, así como el manejo de bases de datos, insumos estratégicos para la sociedad del siglo XXI. Las TIC, junto a la cuantificación de procesos y fenómenos, contribuyen en la generación de modelos matemáticos y estadísticos, que a través de la simulación, permiten estudiar el comportamiento de diversas variables de interés y así soportar la toma estratégica de decisiones.

La Escuela Superior de Administración Pública (ESAP) fomenta los procesos académicos para la construcción de conocimiento en el saber administrativo de lo público, por lo cual pone en sus manos este módulo didáctico *Matemáticas I: precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas*, el cual aporta conceptos, elementos y herramientas para modelar diferentes procesos o fenómenos que se presentan en Administración Pública.

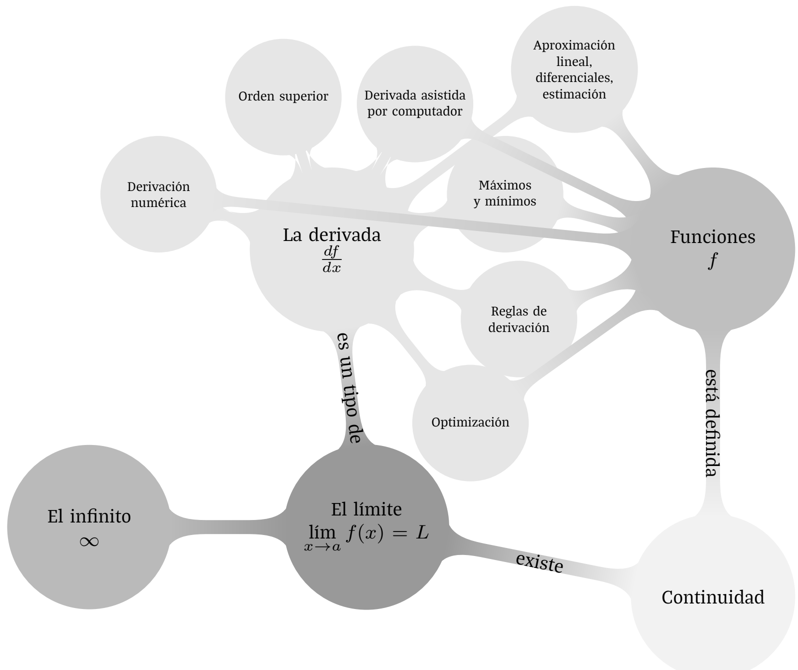


Figura 1. Mapa conceptual de los temas de *Matemáticas I*

Este libro se compone de los siguientes temas o unidades:

1. Funciones:

   De manera intuitiva se presentan situaciones cotidianas que llevan a construir el concepto de función, sus características, representaciones y aplicaciones.

   Se estudian las funciones afines (rectas), cuadrática, exponencial y logarítmica, las cuales, se aplican para representar el comportamiento de diferentes situaciones económicas y administrativas.

2. Límites, infinito y continuidad:

   El analizar las diferentes partes de un todo de manera individual, idealizarlas como una sucesión infinita de segmentos simples, y el proceder a añadir los resultados como un todo, es una de las grandes ideas que las matemáticas aportan al conocimiento universal.

Aquí mezclamos estos conceptos con las habilidades básicas numéricas para complementar el conocimiento matemático desde un ámbito práctico.

3. Derivadas:

   Haciendo énfasis en aplicaciones económicas y administrativas, se presentan de forma práctica conceptos de variación, incremento, razón de cambio y el tema principal del capítulo: la derivada. Con el fin de que el estudiante afiance las ideas expuestas, en todas las secciones se presentan diferentes ejemplos con amplio detalle matemático, algunos de ellos con datos reales de nuestra economía actual, enfatizando la vigencia e importancia que tienen los conceptos matemáticos y en general el pensamiento cuantitativo en la formación de los profesionales de la administración y economía.

4. Aplicación de las derivadas:

   Desde la optimización, pasando por la elasticidad de la demanda o la linealización, en este apartado se abordan los conceptos del cálculo que se requieren para afrontar diferentes aspectos profesionales en ciencias económico-administrativas y en la formación básica universitaria. Se hace énfasis en la solución con sistemas de software libre que pueden ser utilizados de manera ubicua, tanto en PC como en celulares.

Los temas están íntimamente relacionados. A modo de guía hemos incluido un mapa conceptual en la Figura 1 que representa las interacciones entre los diferentes conceptos que veremos en este libro.

Esperamos que este módulo sea de su agrado y que le aporte los conceptos y herramientas que forjen el desarrollo del pensamiento matemático, como su respectiva aplicación en su ejercicio profesional.

Consideramos que los contenidos de la “Sección 2.3” y la “Sección 3.7” son opcionales. Su inclusión en el programa particular depende de la curiosidad y situaciones particulares de su curso.

Capítulo 1

Precálculo y funciones

LUIS MIGUEL CABRERA GONZÁLEZ

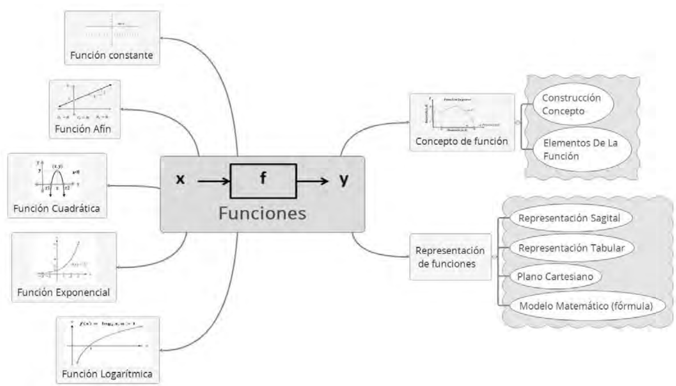


Figura 1.1. Ejes temáticos del "Capítulo 1"

Las funciones son modelos matemáticos que permiten describir y cuantificar situaciones económicas, financieras o administrativas, para la toma de decisiones a nivel profesional. Allí radica la importancia y aporte de abordar este tema en la formación profesional de los administradores públicos.

En este capítulo se abordan los siguientes temas: concepto de función, función constante, función lineal, función exponencial y función logarítmica; estos permiten modelar la mayoría de las situaciones que se presentan en economía, finanzas y presupuestos entre otros, para la toma de decisiones en administración pública y el desarrollo de competencias profesionales. La relación entre estos temas está representada en la figura 1.1.

Situación Problema

En la vida diaria se presentan situaciones como: el valor de una fruta depende del peso; el ingreso depende de la cantidad de días trabajados; el costo de una boleta de un concierto depende de la ubicación; el costo de un pasaje intermunicipal depende de la distancia a recorrer; estos son algunos ejemplos en los que se hace presente la dependencia entre variables, lo cual nos lleva a utilizar las funciones para describir dichas dependencias de manera inequívoca.

Presaberes

Entre las actividades usuales dentro de las entidades organizacionales, se encuentra la realización de inventarios, en los cuales se debe dar cuenta de variados aspectos como: nivel de escolaridad, género, escalafón y edad del personal; cantidad y tipo de computadores; presupuesto y nómina, entre otros.

Los mencionados aspectos tienen diferentes cualidades: sirven por un lado para categorizar (nivel de escolaridad, género, escalafón) y por otro lado para cuantificar (edad, cantidad de computadores, presupuesto, nómina).

Es así que aparecen las “variables”, estas permiten categorizar o cuantificar diferentes características en general, de tal manera que mediante letras o símbolos se refieren a dichos atributos o medidas. Básicamente, la clasificación de las variables en cuantitativas y cualitativas se presenta en la figura 1.2.

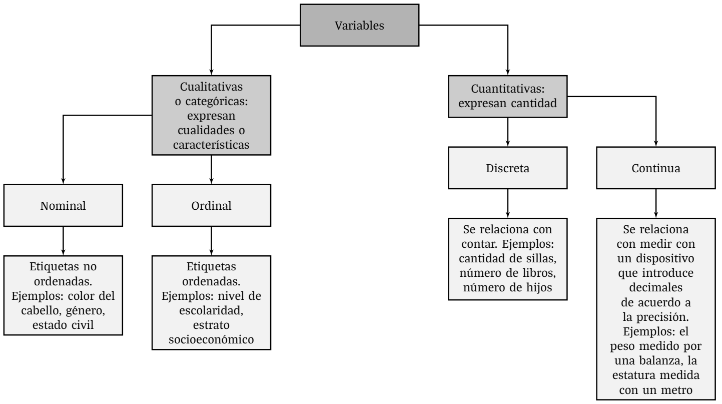


Figura 1.2. Clasificación de variables

Una segunda forma de clasificar las variables es:

- *Variable independiente:* su existencia y comportamiento no se ve afectado por otras variables en un contexto dado. Por ejemplo: el tiempo, peso de un objeto.

- *Variable dependiente:* se ve afectada directamente por la presencia o comportamiento de otras variables. Este caso se representa con frecuencia cuando se tienen relaciones funcionales (fórmulas); por ejemplo, el Ingreso $I(q) = 5q$ depende de la producción q.

En términos prácticos, para el estudio y aplicación de la matemática, necesitaremos de un conjunto de números que posibiliten la realización de operaciones y establecer relaciones, por lo cual, utilizaremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, los cuales se componen de la unión de los números racionales y los números irracionales.

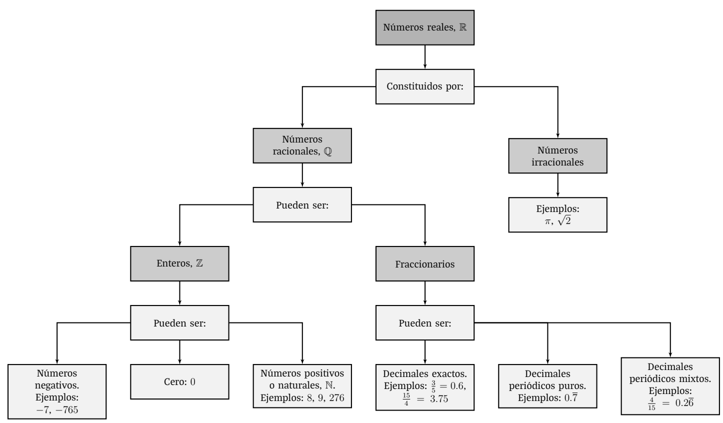


Figura 1.3. Esquema números reales

Otra forma de representación gráfica es mediante una línea recta, la recta real, representada en la figura 1.4.

Se observa que la recta es densa (no hay espacios o rotos entre los números).

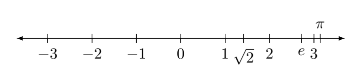


Figura 1.4. Recta real

Se recomienda consultar las siguientes unidades didácticas para fortalecer conceptos básicos:

- Unidad 1. Números reales: http://dp.hpublication.com/publication/c38a2d7a/mobile/

- Unidad 2. Exponentes y radicales: http://dp.hpublication.com/publication/2d844c56/mobile/
- Unidad 3. Expresiones algebraicas: http://dp.hpublication.com/publication/ca3c6151/mobile/
- Unidad 4. Productos y cocientes notables: http://dp.hpublication.com/publication/ddfcd822/mobile/
- Unidad 5. Factorización: http://dp.hpublication.com/publication/33f2b90e/mobile/

1.1. Concepto de función

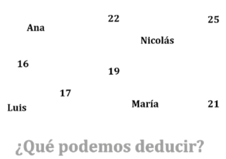


Figura 1.5. Situación inicial

En la vida diaria hay situaciones en las que se presenta la dependencia entre variables, lo cual nos lleva a usar funciones para describir dichas dependencias de manera inequívoca.

Las funciones son modelos matemáticos que permiten describir y cuantificar situaciones económicas, financieras o administrativas, para la toma de decisiones a nivel profesional. Por ello es la importante abordar este tema en la formación profesional de los administradores públicos.

Conceptos previos

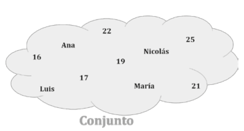


Figura 1.6. Situación conjunto

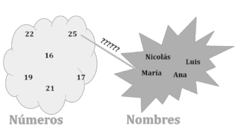


Figura 1.7. Relaciones de conjunto

A partir de la situación representada en la figura 1.5, ¿qué podemos deducir?

A simple vista, es algo complejo poder establecer alguna relación entre dichos elementos. Pero podemos pensar en la idea de un conjunto, como se ve en la figura 1.6.

Seguimos con la complejidad para establecer relaciones o algún significado, luego se puede separar nombres y números en dos conjuntos, cómo se ve en la figura 1.7.

Esta organización de los datos, no aporta mucho con el significado, luego podemos reordenar como se muestra en la figura 1.8.

En este caso, se empieza a esclarecer un poco el posible significado que se pueda dar a dicha relación planteada.

Es necesario establecer un "contexto" para darle sentido a la interpretación de los datos contenidos en los conjuntos.

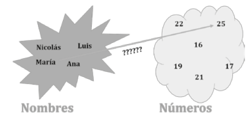


Figura 1.8. Relaciones de conjunto

Como contexto podemos asumir que los *nombres* corresponden al *personal* que labora en una entidad y los *números* representan el *dinero* obtenido como *salario* por su labor realizada (se asume que todos trabajaron). De este modo, se plantea la relación *salario*. Analicemos los siguientes casos, para dicha relación.

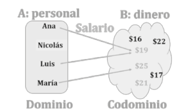


Figura 1.9. Caso 1: relación salario

Caso 1

La relación de *salario* representada en la figura 1.9, ¿tiene sentido?

Observe que al trabajador Nicolás *no* se le asignó salario alguno, desconociendo su trabajo, lo cual es contradictorio, es decir, *no* tiene sentido, luego, *no es función.*

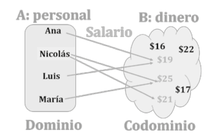


Figura 1.10. Caso 2: relación salario

Caso 2

Pensemos en la relación de *salario* representada en la figura 1.10. En el conjunto de partida, se observa que Nicolás, tiene asignados dos salarios diferentes, lo cual *no* tiene sentido, es decir, *no es función.*

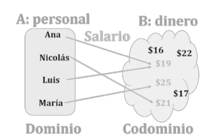


Figura 1.11. Caso 3: relación salario

Caso 3

En el tercer caso, representado en la figura 1.11, se observa que a cada empleado le corresponde un solo salario, luego la relación tiene sentido, es decir, sí es función, y podemos describir sus elementos:

- *Dominio* $D_f = \{\text{Ana, Luis, Nicolás, María}\}$ *Personal*
- *Codominio* $C_f = \{16, 17, 19, 21, 22, 25\}$ *Posibles salarios*
- *Recorrido, rango o imagen* $R_f = \{19, 21, 25\}$ *Salarios reales*

El anterior caso nos permite construir el concepto de función.

1.1.0.1. Definición, Función: una función es una regla o procedimiento que asigna a cada elemento del conjunto de partida (dominio), un único elemento en el conjunto de llegada (codominio).

Representación de funciones[1]

En el lenguaje matemático, con la palabra "objeto" se hace referencia a las cosas (elementos) que se emplean tales como: objetos geométricos (recta, punto, ángulo entre otros); objetos aritméticos (fracciones, números, promedios entre otros); objetos de la estadística (diagramas de barras, histogramas, cajas de bigotes entre otros) y en general tenemos objetos como: números, funciones, intervalos, signos, paréntesis, ecuaciones, exponentes, entre otros.

En general, los objetos matemáticos, se expresan mediante una definición, y junto a ella, puede incluirse el procedimiento, cómo se hace, y las propiedades que cumple. Según (Castro Martínez y Castro Martínez, 1997, p. 96), las representaciones matemáticas "Son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes", posibilitan construir conocimiento en torno a los conceptos, procedimientos y sus propiedades. En el anterior apartado se construyó el concepto intuitivo de función y se llegó a una definición común bastante práctica. Ahora procedemos a representar las funciones de formas variadas que afianzan su comprensión.

[1] *Nota histórica:* en el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, quien fue uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el mundo matemático. Se trata de uno de los conceptos elementales que fundamenta la matemática, y su estudio es necesario para aprender el cálculo.
El concepto de función se basa en la idea de que "las cantidades de tipo Y están en función de las cantidades del tipo X". Para precisar el significado y el uso de esta palabra, se debe tener en cuenta: para cada valor de entrada X existe exactamente un valor de salida.

Representación sagital

Se utilizan flechas (sagita) para representar la relación planteada y su sentido. Tenemos un ejemplo en la figura 1.12.

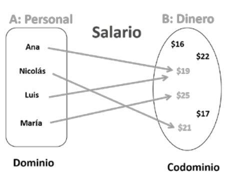


Figura 1.12. Representación sagital

Representación tabular

A partir de la representación sagital, se tiene que:

Salario (Ana)= $19
Salario (Nicolás)= $21
Salario (Luis)= $19
Salario (María)= $25

Se observa que se pueden establecer parejas (Ana, $19), (Nicolás, $21), (Luis, $19), (María, $25), es decir, (Persona, Salario). Esta información se puede resumir (tabular) en la tabla 1.1.

Personal	Ana	Nicolás	Luis	María
Salario	\$19	\$21	\$19	\$25

Tabla 1.1. Representación tabular

Notación funcional

La notación funcional $y = f(x)$, se puede representar como un diagrama de proceso o transformación, donde x representa la variable independiente y y representa la variable dependiente, como se muestra en la figura 1.13.

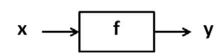


Figura 1.13. La imagen de x bajo la función f es y

Para el ejemplo que se ilustra, se tiene que: $y = f(x)$, donde x representa a las personas, f la asignación del salario y y representa el salario (dinero obtenido). La anterior notación se aplica para el cálculo de las imágenes (tabulación), veamos algunos ejemplos:

a. Dada $f(x) = 2x - 1$, se puede calcular los siguientes valores:
   Si $x = a$ tenemos que $f(a) = 2a - 1$
   Si $x = -2$ tenemos que $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -4 - 1 = -5$
   Si $x = a^2$ tenemos que $f(a^2) = 2a^2 - 1$
   Si $x = \frac{1}{a}$ tenemos que $f(\frac{1}{a}) = 2\left(\frac{1}{a}\right) - 1 - 1 = \frac{2}{a} - 1$
   Se tabula en la tabla 1.2

x	a	-2	a^2	$\frac{1}{a}$
$f(x)$	$2a-1$	-5	$2a^2-1$	$\frac{2}{a}-1$

Tabla 1.2. Representación tabular

b. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ podemos evaluar:
   Si $x = a - b$, entonces $f(a-b) = 3(a-b)^2 - 2(a-b) + 1$
   Si $x = \frac{1}{y}$, entonces $f\left(\frac{1}{y}\right) = 3\left(\frac{1}{y^2}\right) - 2\left(\frac{1}{y}\right) + 1 = \frac{3}{y^2} - \frac{2}{y} + 1$
   Si $x = 2a$, entonces $f(2a) = 3(2a)^2 - 2(2a) + 1 = 3 \cdot 4a^2 - 4a + 1 = 12a^2 - 4a + 1$
   Si $x = \Delta$, entonces $f(\Delta) = 3(\Delta)^2 - 2(\Delta) + 1 = 3\Delta^2 - 2\Delta + 1$

Plano cartesiano

La representación de los salarios de Ana, Nicolás, Luis y María en el plano cartesiano se muestra en la figura 1.14.

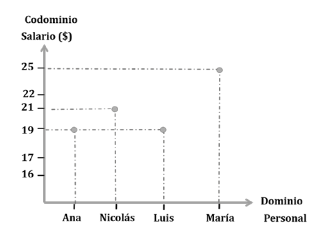


Figura 1.14. Plano cartesiano

Modelo matemático (fórmula)

En general, se expresa una relación entre variables de manera cuantitativa. Por ejemplo: si x representa la longitud del lado de un cuadrado, el área se puede calcular como $A(x) = x^2$

Aprender más

De acuerdo a su entorno, identifique y conceptualice cinco casos, en los cuales se presenten relaciones que se puedan caracterizar como funciones.

1.2. Función constante

En la vida práctica, hay situaciones particulares que plantean preguntas como las siguientes:

- En un grupo de personas determinado, ¿todos pueden tener la misma edad?
- Al liquidar el impuesto predial en un municipio, ¿se puede dar el caso de que algunos predios paguen el mismo valor?
- En un examen de conocimientos, ¿se puede dar el caso de que algunos estudiantes obtengan la misma calificación?

Para el ejemplo que venimos analizando, ¿se puede dar el caso de que todo el personal tenga el mismo salario?

El diagrama representado en la figura 1.15 satisface las condiciones para ser función y podemos describir sus elementos:

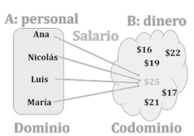


Figura 1.15. Dominio y codominio

Elementos de la función

- *Dominio* $D_f = \{\text{Ana, Luis, Nicolás, María}\}$ *Personal*
- *Codominio* $C_f = \{16, 17, 19, 21, 22, 25\}$ *Posibles salarios*
- *Recorrido, rango o imagen* $R_f = \{25\}$ *Salario real*

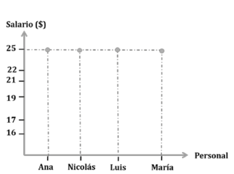


Figura 1.16. Representación sagital. Dominio y codominio

Si expresamos la anterior representación sagital en un plano cartesiano, se tiene la situación de la figura 1.16.

> *Observación:* en este curso se analizarán funciones de valor real, es decir, la entrada son números reales y la salida son números reales
>
> $$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

> *1.2.0.1. Definición, función constante:* si para todo número real x se tiene $f(x) = C$, diremos que se trata de una función constante.

1.2.0.2. Ejemplo, función constante: analicemos la función $f(x) = 3$. Al calcular (tabular), varios valores funcionales tenemos:

- $f(-2) = 3$
- $f(1) = 3$
- $f() = 3$
- $f(\pi) = 3$
- $f(x - y) = 3$
- $f(x^2) = 3$

Se observa que para cualquier valor, la función asigna el valor de 3, con lo cual podemos construir la tabla 1.3.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	3	3	3	3

Tabla 1.3. Función $f(x) = 3$

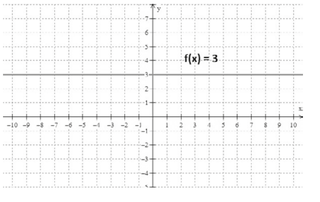


Figura 1.17. Gráfica $f(x) = 3$

Y al graficar dichos puntos se obtiene la figura 1.17 (observe que es una recta horizontal).

Y sus elementos son:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$C_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{3\}$$

Observe que el recorrido es solo un punto (conjunto unitario).

1.2.0.3. Definición, notación de intervalos: los números reales $\mathbb{R}$, se representan gráficamente mediante una línea recta:

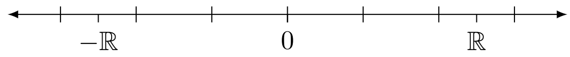


Figura 1.18. El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$

Los intervalos son subconjuntos de la recta real, para los cuales hay que tener en cuenta si se incluyen los extremos (intervalos cerrados) o no (intervalos abiertos). Si tenemos $(a, b)|\{x \in \mathbb{R} \vee a \leq x < b\}$ y cuya gráfica corresponde a:

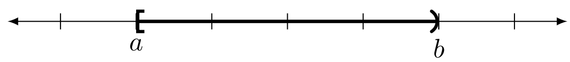


Figura 1.19. Representación del intervalo $[a, b)$ en la recta real, $\mathbb{R}$

Nota: recordar que $-0 = +0 = 0$

Aplicaciones

1. *Envío de paquetes*. Al enviar paquetes, de una ciudad a otra (fijada la distancia), el *precio* depende del *peso* en kilogramos del paquete. Por lo cual las empresas fijan la siguiente tabla de precios:

$$p(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 5, & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 8, & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}$$

Solución

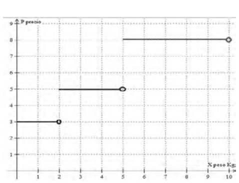


Figura 1.20. Función constante.

a) *Representación gráfica*
La representación gráfica del modelo matemático de la función constante se muestra en la figura 1.20.

b) *Elementos de la función*
$D_p = [0, 2) \cup [2, 5) \cup [5, 10) = [0, 10)$ Rango del peso de los paquetes en kg.
$C_p = (0, \infty)$ Escala de posibles valores a pagar por el envío
$R_p = \{3, 5, 8\}$ Valores establecidos a pagar por el envío

c) Si una persona desea enviar un paquete cuyo peso es de 5 kg, ¿cuánto debe pagar?
Para este caso $x = 5$ y evaluando $p(5) = \$8$ debido a que $5 \in [5, 10)$

d) Tyson desea enviar un paquete cuyo peso es de 10 kg, ¿qué le podemos recomendar?

La empresa no realiza envíos de paquetes cuyo peso sea igual o superior a 10 kg, es decir, solo transporta paquetes cuyo peso sea menor que 10 kg, luego si el paquete se puede fraccionar en dos paquetes, es posible que ocurran, a manera de ejemplo, las siguientes situaciones:

- Dos paquetes de exactamente 5 kg cada uno, para lo cual pagaría por el envío $\$16$, ya que $p(5) = \$8$, en total $\$16$.
- Si se divide en un paquete de 9 kg pagando $p(9) = \$8$ y un paquete de 1 kg pagando $p(1) = \$3$, se tendría un total de $\$11$, opción más económica que la anterior.

2. *Envío de giros*. Las empresas que prestan el servicio de giros cobran una comisión según el monto de dinero enviado, como se ilustra en la figura 1.21

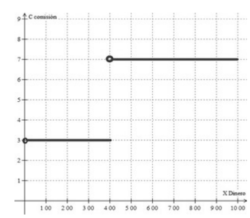


Figura 1.21. Función constante

Solución

a) *Modelo matemático*

$$C(x) = \begin{cases} \$3, & \text{si } 0 < x \leq 400 \\ \$7, & \text{si } 400 < x \leq 1000 \end{cases}$$

b) *Elementos de la función*
$D_C = (0, 400] \cup (400, 1000] = (0, 1000]$ Rango de dinero a enviar
$C_C = (0, \infty)$ Escala de posibles valores a pagar por el giro
$R_C = \{3, 7\}$ Valores reales o establecidos a pagar por el giro

c) Si una persona desea realizar un giro de $\$400$, ¿cuánto debe pagar?
$C(400) = \$3$, razón: $400 \in (0, 400]$

d) Si a una persona le cobraron $\$7$, ¿cuánto giró?
La persona giró una cantidad de dinero comprendida entre $400 < x \leq 1000$.

PROBLEMAS

1.2.0.4. ● *Tarea, función a trozos:* un municipio cobra una multa de $40 mil, si se paga dentro de los primeros 4 días de cometida, luego aumenta el 25 % si se pasa de los 4 días hasta el séptimo día y finalmente se cobra el doble si paga pasado el día 7 hasta el día 9.

a. Grafique y construya la función "Multa en función del tiempo" (modelo matemático)

b. Evaluar cuánto le cobran una persona si paga en el día 7

c. Si un ciudadano pagó $50 mil, ¿entre cuáles días pagó?

1.2.0.5. ● *Tarea, función a trozos:* un municipio otorga un descuento de $80 mil, si se paga un impuesto dentro de los primeros 5 días, luego reduce el 25 % del descuento si se pasa del quinto día hasta el séptimo día y finalmente solo otorga la mitad del descuento si paga después del día 7 hasta el día 9.

a. Grafique y construya la función "Multa en función del tiempo" (modelo matemático)

b. Evaluar cuánto le descuentan una persona si paga en el día 7

c. Si un ciudadano solo le descuentan $60 mil, ¿entre cuáles días pagó?

1.2.0.6. ● *Tarea, función a trozos:* un municipio cobra una multa de $50 mil, si se paga dentro de los primeros 5 días de cometida, luego aumenta el 40 % si se pasa del quinto día hasta el séptimo día y finalmente se cobra el doble si se pasa del día 7 hasta el día 10.

a. Grafique y construya la función "Multa en función del tiempo" (modelo matemático)

b. Evaluar cuanto le cobran una persona si paga en el día 7

c. Si un ciudadano pagó $70 mil, ¿entre cuáles días pagó?

1.2.0.7. ● *Tarea, función a trozos:* un municipio otorga un descuento de $100 mil, si se paga un impuesto dentro de los primeros 4 días, luego reduce el 30 % del descuento si se pasa del quinto día hasta el séptimo día y finalmente solo otorga la mitad del descuento si paga después del día 7 hasta el día 10.

a. Grafique y construya la función "Multa en función del tiempo" (modelo matemático)

b. Evaluar cuánto le descuentan una persona si paga en el día 7

c. Si un ciudadano solo le descuentan \$50 mil pesos, ¿entre cuáles días pagó?

1.3. Función afín y función lineal

1.3.1. Conceptos previos

Ejemplos de significado de relaciones funcionales

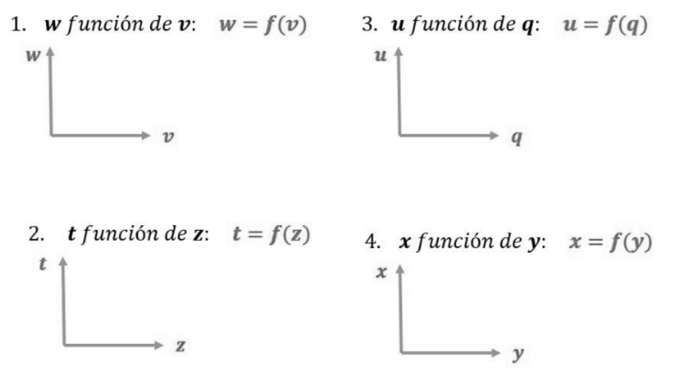


Tabla 1.4. Relaciones funcionales

1.3.2. Funciones en economía

q : denota la producción
p : precio

- $p = f(q)$: ecuación de demanda-oferta
- $I = pq$: función ingreso, observe que $I = f(q)$
- $C = C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}}$: función costo
  $C = C_{\text{fijo}} + C_{\text{unitario}} \cdot q$
- $\overline{C} = \frac{C}{q}$: función costo promedio
- $U = I - C$: función utilidad

1.3.3. Función afín y función lineal (rectas)

Recordemos tres definiciones importantes:

1.3.3.1. Definición, función polinomial: una función polinomial de grado n tiene la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. El coeficiente principal es a_n y el término constante es a_0 . Además: $a_n \neq 0$, n entero no negativo y los coeficientes son números reales. Las funciones polinomiales de grado 0, 1 y 2, debido a su simplicidad y gran utilización, reciben los siguientes nombres:

Grado	Función	Expresión polinomial
0	Constante	$y = a$
1	Lineal	$y = mx + b$
2	Cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$

Tabla 1.5. Relaciones funcionales

Al graficar la función constante y la función lineal se obtienen líneas rectas.

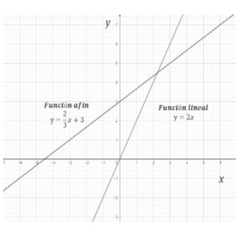


Figura 1.22. Función afín y función lineal

1.3.3.2. Definición, función afín: es una función polinómica de primer grado, cuya gráfica es una línea recta, y se expresa de la forma $f(x) = mx + b$, donde m representa la pendiente y b (ordenada) es el punto de corte con el eje vertical; como se muestra en la figura 1.22.

1.3.3.3. Definición, función lineal: en el contexto del análisis matemático, es una función afín que no tiene término independiente (siempre pasa por el origen) y cuyo modelo matemático, se expresa como: $f(x) = m \cdot x$, donde m es la pendiente.

Las anteriores definiciones aportan los siguientes elementos:
Si la gráfica de una función es una línea recta, se tiene:

- Si la recta pasa por el origen de coordenadas, es una función lineal, $y = m \cdot x$

- Si no pasa por el origen, es una función afín, $y = m \cdot x + b$

Para efectos prácticos, muchos autores como Haeussler, Paul, y Wood (Haeussler et al. 2015), plantean la siguiente definición:

1.3.3.4. Definición, función lineal (segunda definición): una función lineal (su gráfica es una línea recta) es una función de la forma $f(x) = m \cdot x + b$ donde m (pendiente), b (punto de corte con el eje vertical) y la variable x son números reales.

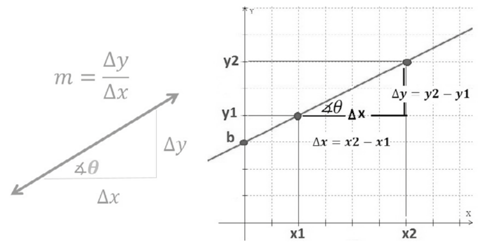


Figura 1.23. Definición función lineal

¿Cómo hallar la pendiente y la ecuación de la recta?

1.3.3.5. Definición, pendiente: para la pendiente se requiere de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

De acuerdo al valor del ángulo θ, se pueden presentar las situaciones que están representadas en la figura 1.24.

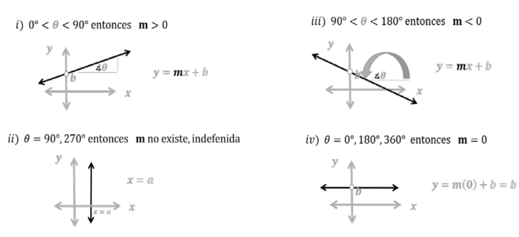


Figura 1.24. Definición función lineal

> *1.3.3.6. Definición, ecuación de la recta para un punto conocido (x_0, y_0):*
>
> $$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Observación: recordemos que estamos trabajando con funciones reales o de valor real, por lo cual: $f : A \subseteq B, \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, además, $y = f(x) = m \cdot x + b$ es el modelo matemático. En la mayoría de los casos tratados en este texto se tiene que: $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$.

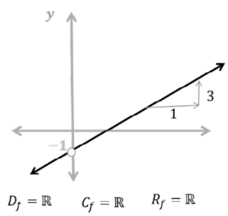


Figura 1.25. Interpretación de modelos

1.3.4. Interpretación de modelos

Básicamente se pueden presentar dos posibilidades:

a. A partir del modelo matemático (fórmula) graficar e interpretar sus parámetros.

    1. $y = 3x - 1$
    La pendiente $m = 3$, significa que por cada unidad que se avance horizontalmente, se incrementa en 3 unidades la variable y. Además, el punto de corte $b = -1$ significa que la recta corta el eje vertical en el valor -1, como se muestra en la figura 1.25.

    2. $y = 2 - 3x = -3x + 2$
    La pendiente $m = -3$ significa que, por cada unidad que se avance horizontalmente, se decrece en 3 unidades la variable y. Además, el punto de corte $b = 2$ significa que la recta corta el eje vertical en el valor 2, como se muestra en la figura 1.26.

    3. $y = 2x + 3$
    La pendiente $m = 2$ significa que, por cada unidad que se avance horizontalmente, la variable y se incrementa en 2 unidades. Además, el punto de corte $b = 3$ significa que la recta corta el eje vertical en el valor 3, como se muestra en la figura 1.27.

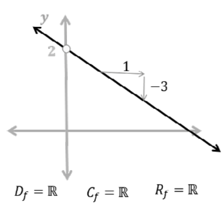


Figura 1.26. Interpretación de modelos

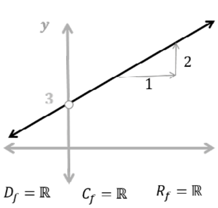


Figura 1.27. Gráfica interpretación de modelos

b. A partir de la representación gráfica, que en este caso mostramos en la figura 1.28, hallar el modelo matemático.

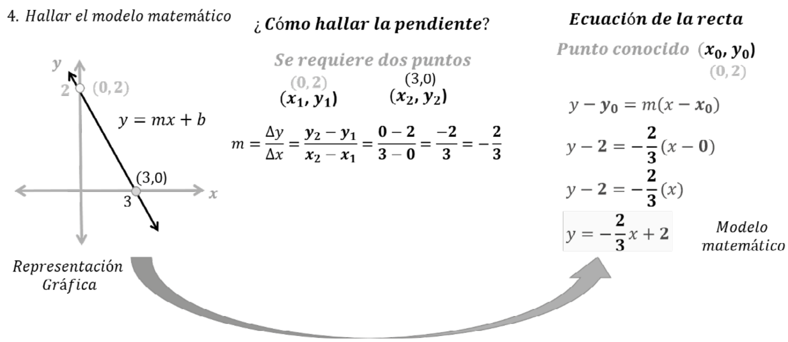


Figura 1.28. Modelo matemático función lineal

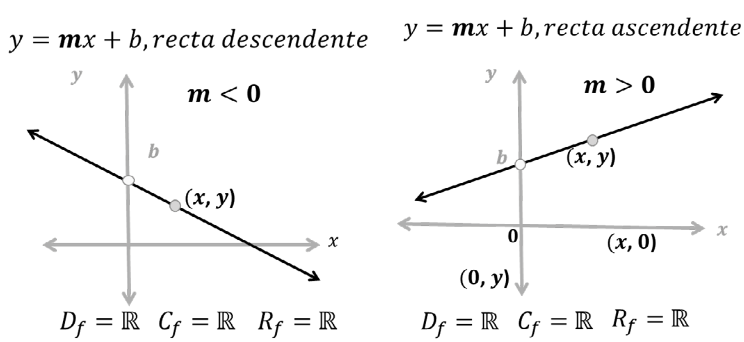


Figura 1.29. Modelo matemático $y = f(x) = mx + b$, función afín

Observación: para la función afín $y = f(x) = m \cdot x + b$, es importante tener presente que la recta es ascendente si el signo de su pendiente es positivo y es descendente si el signo de su pendiente es negativo.

1.3.4.1. Ejemplo, recta interactiva: el siguiente recurso, elaborado con el software GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/u2pdrZBr?fbclid=IwAR0qbvIEC33L1yugG4ys2VquRKBRWjSM8reLKzbcbhWxNcAwbK9tntIM9rg), te permite interactuar cambiando el parámetro de la pendiente m y el punto de corte b.

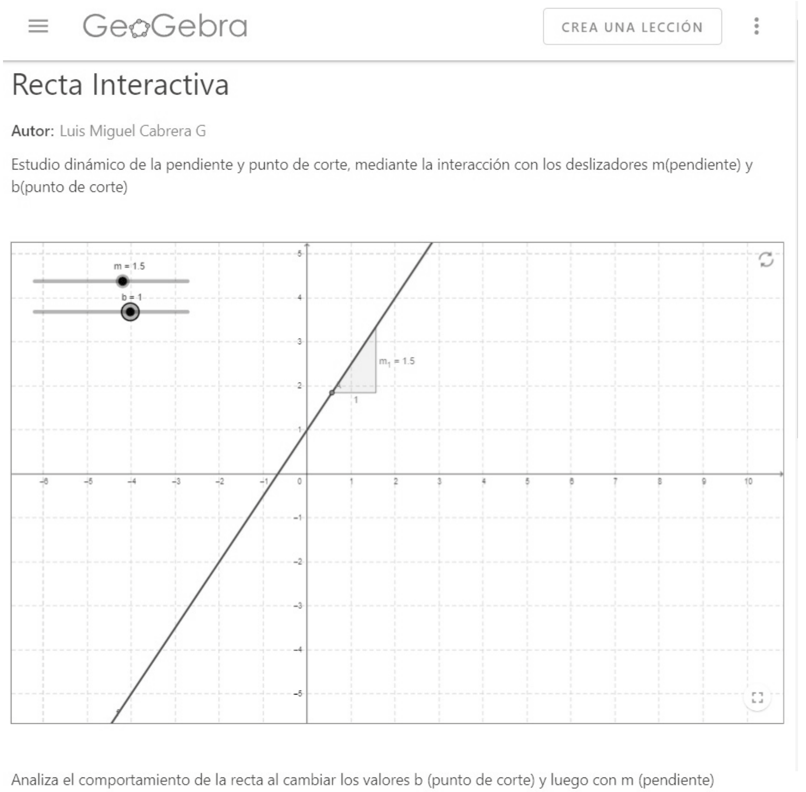


Figura 1.30. Recta interactiva GeoGebra

A partir de la imagen, se deduce que la pendiente es $m = 1.5$ (observe que el triángulo resaltado en gris, nos ilustra el significado de la pendiente) y el punto de corte $b = 1$, por lo cual, la ecuación de la recta es: $f(x) = 1.5x + 1$. Animamos al lector a variar los parámetros y deducir la respectiva ecuación de la recta.

1.3.5. Aplicaciones función afín o lineal

A continuación, resolveremos dos problemas del libro de Matemáticas para administración y economía de Haeussler (Haeussler et al. 2015)

1.3.5.1. Ejemplo, ecuación de la demanda: suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $\$12.75$ por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de $\$18.75$ cada una. Encuentre la ecuación de la demanda, suponga que es lineal. Determine el precio unitario cuando se demandan 37 unidades.

Solución: es importante inicialmente identificar las variables y su significado, así como realizar un bosquejo de gráfica que ayude a visualizar.

Variable independiente: q: producción
Variable dependiente: p: precio en dólares
$p = f(q)$, cualquier punto (q, p):

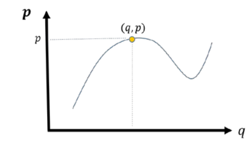


Figura 1.31. Ejemplo. Ecuación de demanda

1. *Identificamos los puntos* (no interesa cuál punto se seleccione como primero o segundo)
   $(q_1, p_1) = (40, \$12.75)$, $(q_2, p_2) = (25, \$18.75)$

2. *Calculamos la pendiente*

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta p}{\delta q} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{18.75 - 12.75}{25 - 40} \\ &= \frac{6}{-15} = \frac{-2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{-2}{5} = -0.40 \end{aligned}$$

   Correspondiente a un porcentaje del $-40\,\%$. Por cada unidad adicional que se produce, el precio decae en un 40 %.

3. *Graficamos*

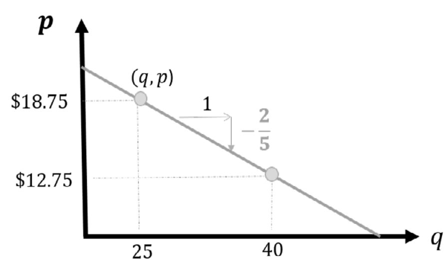


Figura 1.32. Gráfica ecuación de demanda

4. *Hallamos la ecuación de la recta (modelo matemático)*
   Para lo anterior requerimos un punto conocido (puede ser cualquiera de los dos puntos suministrados en el problema). Punto conocido $(40, \$12.75)$.

$$p - \boldsymbol{p_0} = m(q - \boldsymbol{q_0})$$

$$p - \mathbf{12.75} = -\frac{2}{5}(q - \mathbf{40})$$

$$p - \mathbf{12.75} = -\frac{2}{5}(q) - \frac{2}{5}(-\mathbf{40})$$

$$p - \mathbf{12.75} = -\frac{2}{5}q + \frac{2}{5}(\mathbf{40})$$

$$p - \mathbf{12.75} = -\frac{2}{5}q + \frac{80}{5}$$

$$p - \mathbf{12.75} = -\frac{2}{5}q + 16$$

$$p = -\frac{2}{5}q + 16 + \mathbf{12.75}$$

$$p = f(q) = -\frac{2}{5}q + \mathbf{28.75}$$

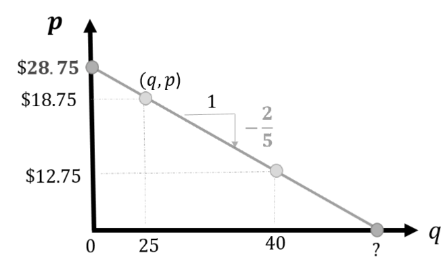


Figura 1.33. Gráfica ecuación de demanda

5. *Características del modelo matemático*

$$p = f(q) = \frac{-2}{5}q + 28.75$$

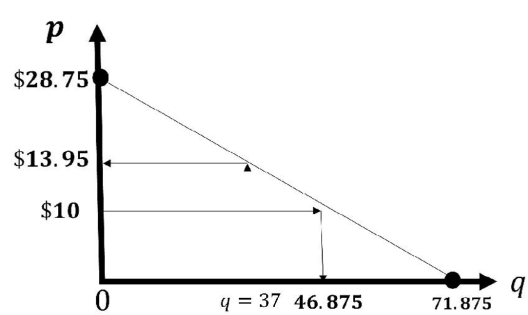


Figura 1.34. Gráfica de la función obtenida

a) ¿Para qué nivel de producción el precio es nulo?

$q = ?\quad p = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{2}{5}q + \mathbf{28.75} \Rightarrow \frac{2}{5}q = \mathbf{28.75}$

$2q = \mathbf{28.75 * 5} \Rightarrow q = (\mathbf{28.75})\frac{5}{2} \Rightarrow q = 71.875$

$q = \mathbf{71.875}$ *es la producción para la cual el precio es nulo*

b) Interpolar $\boldsymbol{q = 37}$ $p = ?\quad p(37) = -\frac{2}{5}(37) + \mathbf{28.75} = \$\mathbf{13.95}$

Para un nivel de producción de $q = 37$ *unidades, se tiene un precio de* \$13.95

c) Extrapolar: Si se desea vender el producto a \$10,
¿Cuál es el nivel de producción? P=\$10 q=?

$10 = -\frac{2}{5}(q) + \mathbf{28.75} \Rightarrow \frac{2}{5}(q) = \mathbf{28.75 - 10} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \mathbf{18.75 * 5/2}$

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{46.875} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{q = 46} \quad p(46) = -\frac{2}{5}(46) + \mathbf{28.75} = \$\mathbf{10.35} \\ \boldsymbol{q = 47} \quad p(47) = -\frac{2}{5}(47) + \mathbf{28.75} = \$\mathbf{9.95} \end{cases}$$

Se recomienda producir q = 47 unidades,
a un precio \$9.95 que es más competitivo

Tabla 1.6. Desarrollo de las respuestas a las preguntas planteadas en el enunciado del ejemplo 1.3.5.1

$$D_p = [0, 71.875) \text{ Rango Real de Producción}$$
$$C_p = (0, \infty) \text{ Rango hipotético del precio}$$
$$R_p = (0, 28.75] \text{ Rango real del precio}$$

6. *Ecuación de oferta:* un fabricante de refrigeradores producirá 3000 unidades cuando el precio sea de $\$940$ y 2200 unidades cuando el precio sea $\$740$. Suponga que el precio, p, y la cantidad producida, q, están relacionadas de manera lineal. Encuentre la ecuación de oferta.

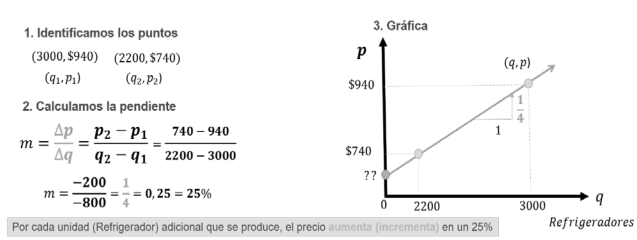


Figura 1.35. Modelo matemático ecuación de oferta para la función afín o lineal

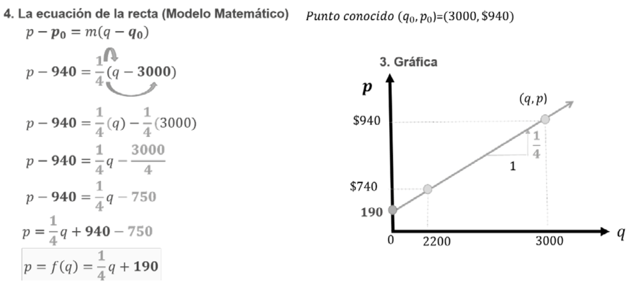


Figura 1.36. Modelo matemático ecuación de la recta

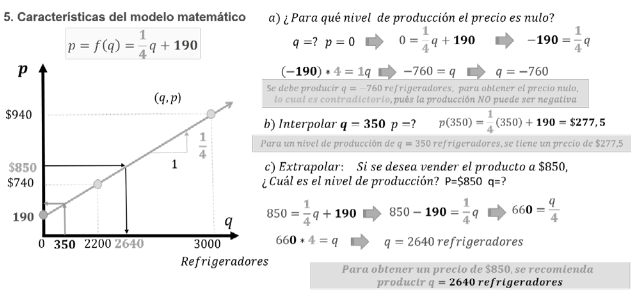


Figura 1.37. Características del modelo matemático ecuación oferta

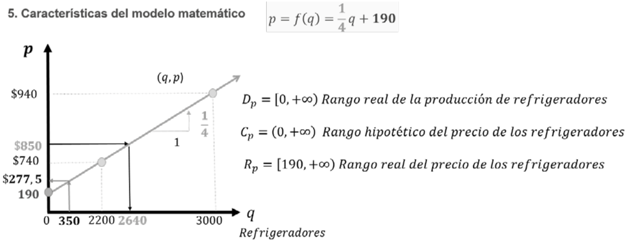


Figura 1.38. Características del modelo matemático ecuación oferta

1.3.6. A modo de cierre

El estudio y aplicación de las funciones es una estrategia importante para modelar y comprender una diversidad de fenómenos o procesos económicos, administrativos o financieros. Dicho conocimiento posibilita la toma de decisiones de manera racional y ajustada a los diferentes contextos en los cuales se desenvuelve el profesional del siglo XXI.

PROBLEMAS

1.3.6.1. • *Tarea, tarifas:* durante 2022, Solo-Giros cobró una tarifa de \$4000 por giros hasta de \$100000; para montos mayores a \$100000 hasta \$400000, cobró \$8000 más el 3 %. Para la función Tarifa, realice:

a) Gráfica

b) Modelo matemático

c) D_T, C_T y R_T, junto a su interpretación.

d) Si alguien desea girar \$102000, ¿qué le recomendaría?

1.3.6.2. • *Tarea, comisión:* Giros Saturno, durante el año pasado cobró una *comisión* de \$5000 por giros de \$50000 hasta \$200000; y para giros superiores a \$200000 hasta \$400000. Finalmente cobró \$9000 más el 3 %. Para la función Comisión, realice:

a) Gráfica

b) Modelo matemático

c) D_C, C_C y R_C, junto a su interpretación.

d) Si alguien desea girar \$205000, ¿usted qué le recomendaría?

1.3.6.3. • *Tarea, tarifa:* la empresa de energía aplica una tarifa de \$10000 por consumo de los primeros $70kW$, pasado este valor hasta los 200 kW, cobra \$10000 más el 5 %. Para la función Tarifa, realice:

a) Gráfica

b) Modelo matemático

c) D_T, C_T y R_T, junto a su interpretación.

d) Si alguien desea girar \$102000, ¿qué le recomendaría?

1.4. Función cuadrática

1.4.1. Conceptos previos

Ejemplos de significado de relaciones funcionales

1. Si tenemos que w es función de ν, se simboliza como $w = f(\nu)$. Por ejemplo, puede ser la representación funcional de la figura 1.39.

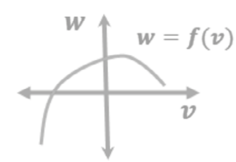


Figura 1.39. Una posible función w, con variable independiente ν

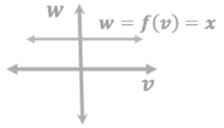


Figura 1.40. w es una función constante

2. Si tenemos que w es función constante de ν, se simboliza como $w = f(\nu) = c$ y gráficamente se representa de la forma representada en la figura 1.40.

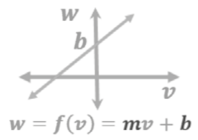


Figura 1.41. w es función lineal de ν

3. Si tenemos que w es función lineal ν, se simboliza como $w = f(\nu) = m \cdot \nu + b$ y gráficamente se representa de la forma representada en la figura 1.41.

4. Si tenemos que w es función cuadrática ν , se simboliza como $w = f(\nu) = a\nu^2 + b\nu + c$ y gráficamente se representa de la forma representada en la figura 1.42.

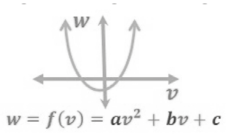


Figura 1.42. w es función cuadrática de ν

1.4.2. Función cuadrática

1.4.2.1. Definición, función cuadrática: una función se denomina cuadrática si y solo si, se puede escribir de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

1. *Gráfica*, al graficar se obtiene una parábola, la cual abre hacia arriba ($a > 0$) o hacia abajo ($a < 0$), es decir, depende del signo de la constante a.

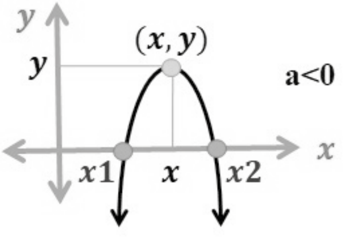


Figura 1.43. Gráfica de la función cuadrática

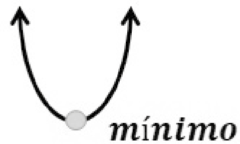
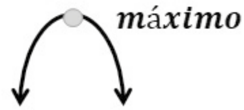
a>0 abre hacia arriba	a<0 abre hacia abajo
	

Tabla 1.7. Gráfica tipos de parábolas (función cuadrática)

2. *Raíces*: $y = f(x) = 0$ equivale a $ax^2 + bx + c = 0$, y

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminate D se define como $D = b^2 - 4ac$.

   a) $D > 0$ Existen 2 raíces reales diferentes.

   b) $D = 0$ Existen 2 raíces reales iguales.

   c) $D < 0$ no existen raíces reales.

3. *Vértice* (x, y),

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

1.4.2.2. Ejemplo, analizar y graficar la función $y = x^2 - 8x + 15$: Se observa que $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

I *Vértice* (x, y)

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = c - \frac{b^2}{4a} = 15 - \frac{(-8)^2}{4(1)} = 15 - \frac{64}{4} = 15 - 16 = -1$$

II *Raíces*: $8x^2 - 8x + 15 = 0$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{8+2}{2} = 5$$

III *Gráfica*

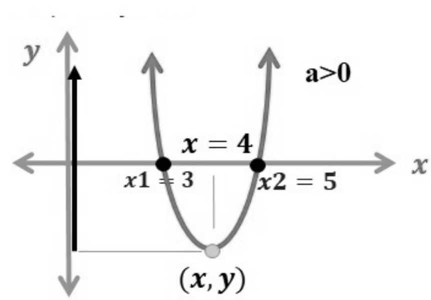


Figura 1.44. Función cuadrática con máximo indefinido o indeterminado

Ejercicio en clase, modelos cuadráticos: (Tiene 2 minutos)

Construya la gráfica de las funciones:

a. $2y = x^2 - 4x + 4$

b. $3y = x^2 + 4$

1.4.3. Aplicaciones función cuadrática

1. La ecuación de demanda para el precio de un monopolista es $p = 24 - 2q$, donde p es el precio en dólares y q la producción. Hallar la producción, el precio que maximiza el ingreso y el ingreso máximo.

   a) Expresa el modelo matemático que representa el ingreso.

   $$I = p \cdot q$$

   $$I = (24 - 2q) \cdot q$$

   $$I = 24q - 2q^2$$

   Es una función cuadrática con $a = -2$, $b = 24$, y $c = 0$.

   b) Halla las raíces

   $$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   $$q = \frac{-24 \pm -24}{-4}$$

   Se obtienen las raíces $q = 0$ y $q = 12$.

   c) Halla el vértice.

   $$q = \frac{-24}{2 \cdot (-2)} = 6$$

   $$I = \$72$$

   d) Gráfica la función ingreso.

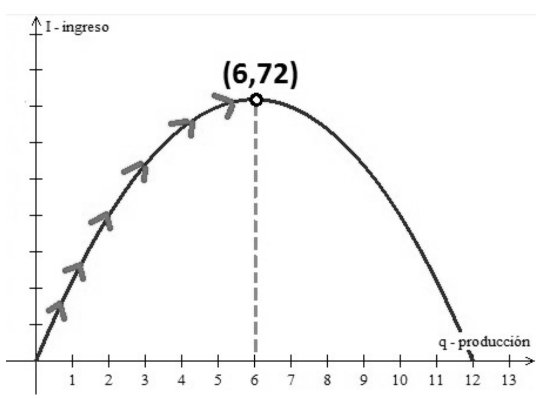


Figura 1.45. Gráfica de la función ingreso aplicación, función cuadrática

   e) Halla el Dominio D_f, Codominio C_f y el recorrido R_f e interpreta.
   $D_f = [0, 12)$ Rango de producción

$C_f = (0, \infty)$ Rango ingreso potencial
$R_f = (0, 72]$ Rango ingreso real

f) ¿Para qué nivel de producción y qué precio se obtiene el ingreso máximo?
Para un nivel de producción de $q = 6$ unidades, a un precio de $p = 24 - 2(6) = 12$, se obtiene el ingreso máximo de \$72.

g) ¿Qué recomendación se le puede hacer al monopolista?
Se recomienda (ver figura 1.45) mantener la producción en el rango [0,6] unidades, para el cual el ingreso es creciente.

2. Para el producto de un monopolista, la ecuación de demanda es $p = 50 - 2q$ y la función de costo promedio $\overline{C} = 6 + \frac{144}{q}$, donde q es el número de unidades, p y $\overline{C}$ se expresan en dólares por unidad. Hallar q, p y la utilidad máxima $U = I\text{-}C$

a) Modelo matemático

$$C = qC = q\left(6 + \frac{144}{q}\right) = 6q + \frac{144q}{q} = 6q + 144$$

$$U = I - C = pq - C = (50 - 2q)q - (6q + 144)$$
$$= 50q - 2q^2 - 6q - 144 = -2q^2 + 44q - 144$$

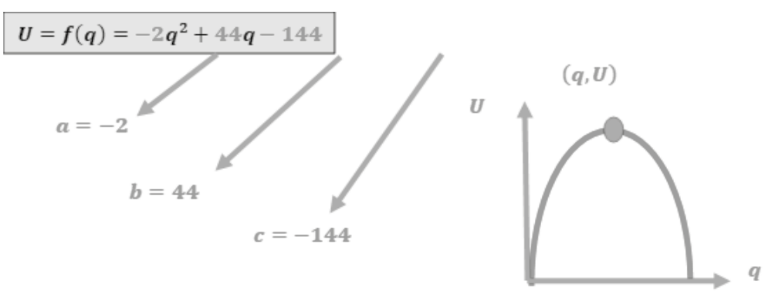


Figura 1.46. Modelo matemático

b) Vértice (q, U)

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{-44}{2 \cdot (-2)}) = \frac{-44}{-2} = 11$$

$$U = c - \frac{b^2}{4a} = -144 - \frac{44^2}{4 \cdot (-2)} = -144 + 242 = \$98$$

c) Raíces

$$-2q^2 + 44q - 144 = 0$$

$$-q^2 + 22q - 72 = 0$$

Aplicando la fórmula para hallar las raíces

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{-(22) \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{-22 \pm \sqrt{196}}{-2} = \frac{-22 \pm 14}{-2} = 11 \pm 7 \end{aligned}$$

Se obtienen las siguientes dos raíces

$$q_1 = 11 - 7 = 4$$

$$q_2 = 11 + 7 = 18$$

d) Gráfica

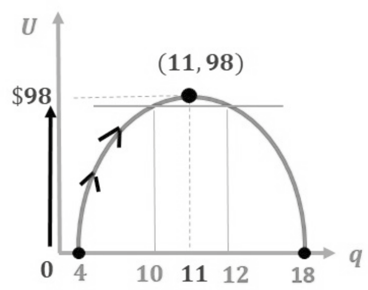


Figura 1.47. Función producto monopolista, ecuación de demanda

e) Características del modelo

$D_I = [4, 18]$ Rango real de producción
$C_I = [0, \infty)$ Rango potencial de la utilidad
$R_I = [0, 98]$ Rango real de la utilidad

f) Interpretación

Señores ACME: se realizó un análisis cuantitativo aplicando la técnica del modelo cuadrático, hallando que se debe producir 11 unidades, a un precio $P = 50 - 2(11) = \$28$ para obtener una utilidad máxima de $\$98$

Observación, fruto de la simetría de la parábola, se observa que q=10 y q=12, tienen la misma imagen (ingreso), es decir:

$$U = f(10) = -2 \cdot (10)^2 + 44 \cdot (10) - 144 = 96$$

$$U = f(12) = -2 \cdot (12)^2 + 44 \cdot (10) - 144 = 96$$

Lo anterior contribuye a realizar la siguiente recomendación, en la cual se restringe el dominio.

g) Recomendación, estimados señores: se les recomienda mantener la producción en el rango $(4, 11]$ (de 4 a 11 unidades), para el cual la utilidad es ¡creciente!

PROBLEMAS

Para la realización de los siguientes problemas se deben seguir los siguientes pasos:

1. Modelo matemático
2. Vértice
3. Raíces
4. Gráfica
5. Interpretación de las características del modelo
6. Interpretación respuesta problema
7. Recomendación (firma incluida)

1.4.3.1. • *Tarea, demanda:* suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio $\overline{C} = 0.2q + 4 + \frac{400}{q}$, donde q es el número de unidades, p y $\overline{C}$ se expresan en dólares por unidad. Hallar q, p y la utilidad máxima $U = I - C$.

1.4.3.2. • *Tarea, demanda:* suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 85 - 0.05q$ y que la función de costo es $C = 600 + 35q$, donde q es el número de unidades, p y C se expresan en dólares por unidad. Hallar q, p y la utilidad máxima $U = I - C$.

1.4.3.3. • *Tarea, costo:* un fabricante determina que el costo total de producir un artículo está dado por la función de costo $C = 0.05q^3 + 5q^2 + 500q$. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad? *Ayuda* $\overline{C} = \frac{C}{q} = \frac{0.05q^3+5q^2+500q}{q}$

1.4.3.4. • *Tarea, costo:* suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 24 - 3q$ y que la función de costo promedio $\overline{C} = 6 - \frac{48}{q}$, donde q es el número de unidades, p y $\overline{C}$ se expresan en dólares por unidad. Hallar q, p y la utilidad máxima $U = I - C$.

1.4.3.5. • *Tarea, demanda:* la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 600 - 2q$, y la función costo total es $C = 0.2q^2 + 28q + 200$ donde q es el número de unidades, p y $\overline{C}$ se expresan en dólares por unidad. Hallar q, p y la utilidad máxima $U = I - C$.

1.5. Función exponencial y función logarítmica

1.5.1. Función exponencial

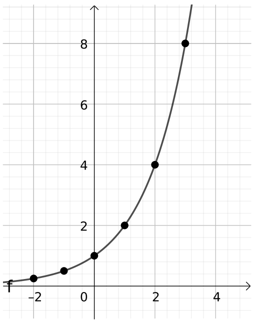


Figura 1.48. Función exponencial $f(x) = 2^x$

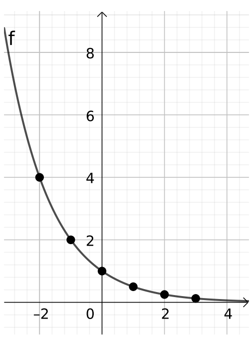


Figura 1.49. Función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

La función exponencial se caracteriza por ser de la forma:

$$f(x) = a^x\ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1$$

La función exponencial tiene dos comportamientos bien diferenciados dependiendo de si la base es mayor que uno, o si se encuentra entre cero y uno. Presentamos sus características en la tabla 1.8.

<table>
<tr><td>a>0 Base mayor que 1</td><td>Base entre 0 y 1</td></tr>
<tr><td>$f(x) = a^x\ ;\ a > 1$</td><td>$f(x) = a^x\ ;\ 0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>Ejemplo
$f(x) = 2^x$</td><td>Ejemplo
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr></table>Representada en la figura 1.48</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr></table>Representada en la figura 1.49</td></tr>
<tr><td>$D_f = \mathbb{R}$
$C_f = \mathbb{R}$</td><td>$D_f = \mathbb{R}$
$C_f = \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Como la base es mayor que 1, es decir: $a = 2 > 1$, se tiene una curva creciente (comportamiento que caracteriza la función cuando $a > 1$).</td><td>Como la base está entre 0 y 1, es decir: $0 < a = 1/2 < 1$, se tiene una curva decreciente (comportamiento que caracteriza la función cuando $0 < a < 1$).</td></tr>
</table>

Tabla 1.8. Función exponencial

1.5.2. Función logarítmica

La función logarítmica se caracteriza por ser de la forma:
$y = \log_a x$ si y solo si $a^y = x$

La función logarítmica tiene dos comportamientos bien diferenciados dependiendo de si la base es mayor que uno, o si se encuentra entre cero y uno. Presentamos sus características en la tabla 1.9.

a>0 Base mayor que 1	Base entre 0 y 1
$f(x) = \log_a x \; a > 1$	$f(x) = \log_a x \; 0 < a < 1$
Ejemplo $f(x) = \log_2 x$	Ejemplo $f(x) = \log_{1/2} x \;,\; 0 < a < 1$
Representada en la figura 1.50	Representada en la figura 1.51
$D = (0, \infty)$ $C = \mathbb{R}$	$D_f = (0, \infty)$ $C_f = \mathbb{R}$
Se observa que al ser la base mayor que 1, es decir: a=2>1, se tiene una curva creciente (comportamiento que caracteriza la función cuando a>1).	Se observa que al ser la entre 0 y 1, es decir: 0<a=1/2<1, se tiene una curva decreciente (comportamiento que caracteriza la función cuando 0<a<1).

Tabla 1.9. Función logarítmica

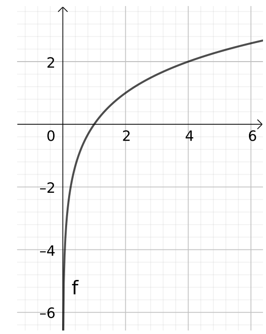


Figura 1.50. Función logarítmica $f(x) = \log_2(x)$

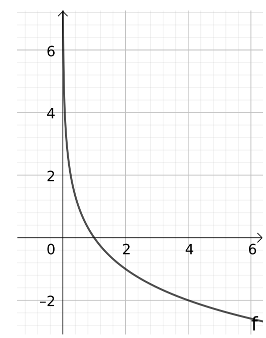


Figura 1.51. Función logarítmica $f(x) = \log_{1/2}(x)$

Observación: la función logaritmo es la función inversa de la función Exponencial, es decir: $y = \log_a x$ si y solo sí $a^y = x$

En términos de una gráfica se observa la relación entre $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \log_2 x$

Propiedades

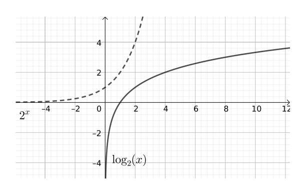


Figura 1.52. Las funciones: 2^x en línea discontinua, y $\log_2(x)$ en línea continua

Exponentes	Logaritmos
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ entonces $a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\log_a a = 1$
$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$	$\log_{10} x = \log x$ $\log_e x = \ln x$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	

Tabla 1.10. Propiedades de las funciones logarítmicas

1.5.3. Aplicaciones

Ejemplo 1 $\log_2 8 = y \Rightarrow 2^y = 8 \Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$ *Luego* $\log_2 8 = 3$

Ejemplo 2 $\log_3 81 = \boldsymbol{w} \Rightarrow 3^w = 81 \Rightarrow 3^w = 3^4 \Rightarrow w = 4$ *Es decir*: $\log_3 81 = \mathbf{4}$

Ejemplo 3 $\log_a 1 = z \Rightarrow a^z = 1 \Rightarrow a^z = a^0 \Rightarrow z = 0$ $\boxed{\boldsymbol{\log_a 1 = 0}}$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \rightarrow a^0 = 1$

Ejemplo 4 $\log_a a = w \Rightarrow a^w = a \Rightarrow a^w = a^1 \Rightarrow w = 1$ $\boxed{\boldsymbol{\log_a a = 1}}$

Ejemplo 5 $\log 100$

$$\log 100 = \log_{10} 100$$
$$= \log_{10} 10^2$$
$$= 2.\log_{10} 10 \quad \text{Se aplica } \log_a x^n = n.\log_a x$$
$$= 2.\log_{10} \cancel{10} \quad \text{Propiedad } \log_a a = 1$$
$$= 2(1) = 2$$

Figura 1.53. Ejemplos de aplicación funciones logarítmicas

Ejemplo. La empresa *Pierda fácil S.A*, plantea a los clientes invertir \$2000 durante 12 años al 8%. Hallar el interés compuesto: a) Anual, b) Semestral c) Trimestral d) mensual. (Ejercicio 24 de la sección 4.1)

$C_0 = \$2000$ $\quad t = 12 \text{ años}$ $\quad$ *tasa de interés* (***anual***) $\boldsymbol{r = 0.08}$ $\quad S = \boldsymbol{C(t)} = C_0 * \boldsymbol{(1 + r)^t}$

a) Anual

$$S = C(12) = 2000 * (1 + \mathbf{0.08})^{12}$$
$$S = C(12) = 2000 * (1.08)^{12}$$
$$S = \$5036.34$$

Interés compuesto

$$IC = C(12) - C_0 = \$5036.34 - \$2000$$
$$IC = \$3036.34$$

c) Trimestre

$$S = C(12) = 2000 * \left(1 + \frac{\mathbf{0.08}}{4}\right)^{12*4}$$
$$S = C(12) = 2000 * (1 + 0.02)^{48}$$
$$S = C(12) = 2000 * (1.02)^{48}$$
$$S = C(12) = \$5174.14$$

Interés compuesto

$$IC = C(12) - C_0 = \$5174.14 - \$2000$$
$$IC = \$3174.14$$

d) Mensual

$$S = C(12) = 2000 * \left(1 + \frac{\mathbf{0.08}}{12}\right)^{12*12}$$
$$S = C(12) = 2000 * (1 + 0.00666)^{144}$$
$$S = C(12) = 2000 * (1.00666)^{144}$$
$$S = \$5201.81$$

Interés compuesto

$$IC = C(12) - C_0 = \$5201.81 - \$2000$$
$$IC = \$3201.81$$

Figura 1.54. Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas

Ejemplo (Ejercicio 47**).**

Resolver: $\boldsymbol{\log_x(2x + 8) = 2} \Leftrightarrow x^2 = 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \quad a = 1, b = -2, c = -8$

Raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x1 = \cancel{\frac{2 - 6}{2} = \frac{-4}{2}} = -2, \textit{ la base no puede ser negativa}$$

$$x2 = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Prueba

$$\boldsymbol{\log_x(2x + 8)} = \boldsymbol{\log_4(2(4) + 8)}$$
$$= \boldsymbol{\log_4(8 + 8)}$$
$$= \boldsymbol{\log_4(16)}$$
$$= \boldsymbol{\log_4}(4^2)$$
$$= 2 * \boldsymbol{\log_4} \cancel{(4)} \quad \text{Prop: } \log_a x^n = n.\log_a x$$
$$= 2 * \mathbf{1} \quad \text{Prop: } \log_a a = 1$$
$$= 2$$

Figura 1.55. Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas

Ejemplo. (Ejercicio 44**).**

Resolver: $\log_8(64) = x - 1 \Leftrightarrow 8^{x-1} = 64 \Rightarrow 8^{x-1} = 8^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3$

Prueba $\log_8(64) = x - 1 \Leftrightarrow 8^{x-1} = 64 \Rightarrow 8^{x-1} = 8^{3-1} = 8^2 = 64$

Figura 1.56. Ejemplo de aplicaciones funciones logarítmicas

Invitamos a quien quiera profundizar en estos temas a revisar la literatura. Los temas que presentamos en la presente sección se pueden profundizar en el libro de Arya y Lardner (Arya et al. 2002) (Capítulo 5. “Funciones y sus gráficas”, pp. 173-186). También está el texto de Haeussler, Paul y Wood (Haeussler et al. 2015) (Capítulo 2: “Funciones y gráficas”, pp. 75-110). Finalmente está el libro de (Tan, 2011) (Capítulo 2, “Funciones y sus gráficas”, pp. 67-87).

Capítulo 2

Infinito, límites y continuidad

GABRIEL VILLALOBOS CAMARGO

Situación problema

Dada una función que expresa el precio de un artículo como función del tiempo, ¿se puede saber si la tasa a la que cambia el precio aumenta o disminuye? ¿Se puede aproximar el cambio de los costos del artículo enésimo que se está produciendo?

Exactamente, ¿cómo se deriva? Estas son el tipo de preguntas que responde el cálculo diferencial y que el estudiante será capaz de solucionar al final del curso.

2.1. El infinito

2.1.1. El principio del infinito

2.1.1.1. Definición, principio del infinito: para comprender una forma continua, un objeto, un movimiento, un proceso, un fenómeno, –sin importar lo extraño y complicado que parezca– reimagínelo como una secuencia infinita de partes más simples, analice esas partes, y luego añada los resultados para comprender el todo original.

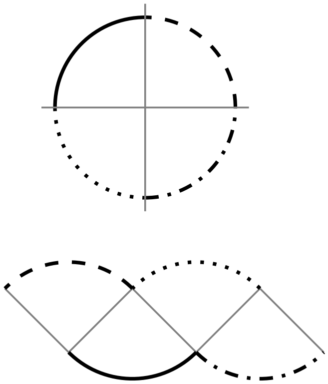


Figura 2.1. Prueba de la pizza, 4 cortes

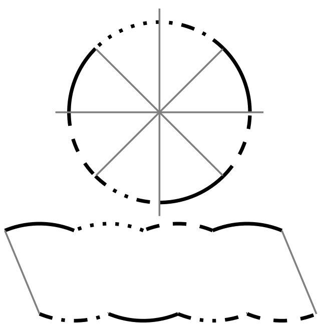


Figura 2.2. Prueba de la pizza, 8 cortes

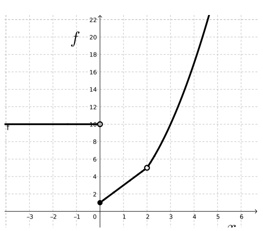


Figura 2.3. Ejemplo, función definida a trozos

2.1.1.2. Ejemplo, prueba de la pizza: ¿cuál es el área de un círculo?

Se puede aproximar el área del círculo de la siguiente manera. Tomemos un círculo cuya circunferencia (el perímetro), mide C. Se puede cortar en varias partes y reorganizar, como se muestra en la figura 2.1.

En un segundo paso, en lugar de tomar 4 cortes, podemos tomar 8 cortes, logrando lo que se muestra en la figura 2.2.

A medida que se toman más trozos, se puede ver que la figura se parece cada vez más a un rectángulo de altura r (el radio del círculo) y ancho $C/2$. *En el límite en que el número de cortes tiende a infinito*, se puede ver que el área del círculo se relaciona con el radio y la circunferencia como: $A = RC/2$.

Esta demostración aparece inicialmente en *Infinite Powers*, de Steven Strogatz (S. Strogatz, 2019). Otro texto muy interesante sobre el infinito, también de Strogatz, es su texto clásico *The joy of x* (S. H. Strogatz, 2012). Una forma diferente de visualizar los límites se encuentra en las paradojas griegas y su tratamiento contemporáneo (Orlin, 2019).

2.1.2. Concepto de límite, límites laterales

2.1.2.1. Ejemplo, límite por la derecha, función definida a trozos: sea f la función definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x^2+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función está en la figura 2.3.

¿A qué valor tiende *la función* cuando **x** se acerca a 0 por la derecha?

Para estimar ese valor, construimos una tabla. Tomamos valores cada vez más cercanos a 0, pero mayores que 0.

Al ver los valores de la tabla 2.1, concluimos que cuando x se acerca a 0 por la derecha, f se acerca a 1.

Con este ejemplo, podemos definir el límite por la derecha.

2.1.2.2. Definición, límite por la derecha de una función: el límite de la función f cuando x se acerca a c, con valores mayores a c, es el número al cual tiende la función cuando los valores de x se acercan a c, pero son mayores que c. Se simboliza como:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \tag{2.1}$$

Lo cual se lee como: "límite cuando x tiende a c por la derecha de f es igual a L".

x	$f(x)$
1	3
0.5	2
0.1	1.2
0.001	1.002

Tabla 2.1. Algunos valores de la función representada en la figura 2.3

De manera similar, si se toman valores *menores* a c, se trata del límite por la izquierda.

2.1.2.3. Definición, límite por la izquierda de una función: el límite de la función f cuando x se acerca a c, con valores menores a c, es el número al cual tiende la función cuando los valores de x se acercan a c, pero son menores que c. Se simboliza como:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \tag{2.2}$$

Lo cual se lee como: "límite cuando x tiende a c por la izquierda de f es igual a L".

2.1.2.4. Ejemplo, límite por la izquierda de una función: para la función f representada por la figura 2.3 ¿Cuál es el valor del límite por la izquierda en cero?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \tag{2.3}$$

Solución: vemos que, a la izquierda de 0, la función toma el valor de 10. Expresado en la tabla 2.2.

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 10 \tag{2.4}$$

x	$f(x)$
-2	10
-1	10
-0.1	10
-0.001	10

Tabla 2.2. Representación de algunos valores de la figura 2.3

2.1.2.5. Definición, límite de una función: cuando el límite por la izquierda de una función es igual al límite por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \tag{2.5}$$

decimos que el límite existe.

Se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{2.6}$$

2.1.2.6. Ejemplo, calcular un límite: calcule el $\lim_{x\to 0} f(x)$ para la función f representada por la figura 2.3.

Respuesta:

Según la definición de límite, (2.6), es necesario comparar el valor del límite por izquierda con el del límite por derecha. Entonces:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 10 \tag{2.7}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \tag{2.8}$$

Como esos valores son distintos, $10 \neq 1$, entonces:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \text{ No existe} \tag{2.9}$$

El límite no existe, sin importar que el valor funcional sí existe, y vale:

$$f(0) = 1 \tag{2.10}$$

2.1.2.7. Definición, límite de una función contra valor funcional: no hay una relación única entre límite de una función en un punto y el valor de la función en ese punto. Pueden ser iguales o distintos.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{2.11}$$

$$f(x) = M \tag{2.12}$$

2.1.2.8. Definición, vecindad: un número x está en la vecindad de a, si su valor es cercano a a. En lenguaje matemático, si δ es un valor pequeño, la vecindad de a está compuesta por los valores tales que:

$$|x - a| < \delta \tag{2.13}$$

2.1.3. Límites para funciones definidas en un intervalo

Sea f una función definida en un intervalo: $x \in [A, B]$, con A el extremo izquierdo del intervalo y B el extremo derecho; como es la función figura 2.4. Pensemos en el extremo izquierdo. Allí, solo se puede definir el límite por la derecha, ya que por la izquierda no está definida la función. De la misma forma, en el extremo derecho es solo se puede definir el límite por la izquierda.

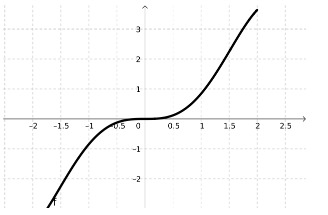


Figura 2.4. Límite de una función definida en un intervalo

2.1.3.1. Definición, límites para funciones definidas en un intervalo: sea f una función definida en un intervalo, es decir:

$$f(x) \;\; x \in [A, B]$$

Entonces el límite en el extremo izquierdo no existe. Allí solo existe el límite por derecha.

$$\lim_{x \to A} f(x) = \text{ no está definido}$$

Y en el extremo derecho solo existe el límite por izquierda.

$$\lim_{x \to B} f(x) = \text{ no está definido}$$

2.1.4. Propiedades de los límites

2.1.4.1. Definición, propiedades de los límites: sea k una constante y f y g funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, es decir los límites existen. Entonces las propiedades son:

1. *Propiedad de la suma:* $\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ esto es el límite de una suma es la suma de los límites.
2. *Propiedad de la resta:* $\lim_{x \to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$ es decir que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites.
3. *Propiedad del producto por constante:* $\lim_{x \to a}[k * f(x)] = k * \lim_{x \to a} f(x)$. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.
4. *Propiedad del producto de funciones* $\lim_{x \to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$. El límite de un producto es el producto de los límites.

5. *Propiedad del cociente de funciones:* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. El límite de un cociente es el cociente de los límites siempre y cuando el límite del denominador no sea cero.

6. *Propiedad de la potencia:* $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo. El límite de la potencia entera positiva de una función es la potencia entera positiva del límite de la función.

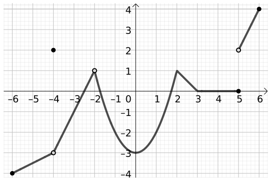


Figura 2.5. Función f, referenciada en el ejercicio 2.1.4.2

Ejercicios y tareas

2.1.4.2. • *Tarea, límites:* vamos a determinar límites gráficamente, para la función representada por la figura 2.5

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿A qué valor tiende la función f cuando x se acerca a 0 por la derecha? Es decir, cuánto vale el $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. (Ayuda: piense en cuánto vale f en $x = 0.01$)

b) ¿A qué valor tiende la función f cuando x se acerca a 5 por la derecha? Es decir, cuánto vale el $\lim_{x \to 5^+} f(x)$. (Ayuda: piense en cuánto vale f en $x = 5.01$)

c) Cuánto vale la función en 5, es decir $f(5)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 5^-} f(x) =$

f) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

2.1.4.3. • *Tarea, concepto de límite:* para la función definida por la figura 2.5, calcule las siguientes cantidades (límites o valores funcionales):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4} f(x) &= \\
f(-4) &= \\
\lim_{x\to -2} f(x) &= \\
f(-2) &= \\
\lim_{x\to 2} f(x) &= \\
f(2) &= \\
\lim_{x\to 0} f(x) &= \\
f(0) &= \\
\lim_{x\to -3} f(x) &= \\
f(-3) &=
\end{aligned}$$

¡Ojo! Como vemos en algunos de estos ejemplos, el valor de la función y el valor del límite pueden ser iguales, como en $x = 2$ o $x = 0$; puede que la función no esté definida, como en $x = -2$; o puede que sean distintos, como en $x = -4$.

Solución en la nota al pie [1]

[1] Para la función definida por la figura 2.5, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4} f(x) &= -3 \\
f(-4) &= 2 \\
\lim_{x\to -2} f(x) &= 1 \\
f(-2) &= \text{No está definida} \\
\lim_{x\to 2} f(x) &= 1 \\
f(2) &= 1 \\
\lim_{x\to 0} f(x) &= -2 \\
f(0) &= -2 \\
\lim_{x\to -3} f(x) &= -1 \\
f(-3) &= -1
\end{aligned}$$

2.1.4.4. • *Tarea, relación entre el límite y el valor funcional:* si la función f está definida en $x = a$, entonces necesariamente se tiene que cumplir que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)? \tag{2.14}$$

Explique su respuesta.

Solución en la nota al pie [2]

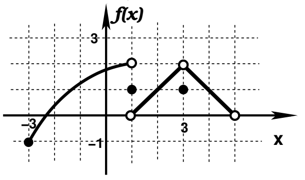


Figura 2.6. Ejercicio 2.1.4.5, límites

2.1.4.5. ★ *Tarea, límites y valores funcionales:* use la gráfica de la función f, representada en la figura 2.6, para estimar el valor de cada cantidad. Si la cantidad no existe, explique por qué. La función está definida en $[-3, 0) \cup (0, 5)$.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

f) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

g) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

h) $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

i) $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

j) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

k) $\lim_{x \to 5^-} f(x) =$

l) $\lim_{x \to 5} f(x) =$

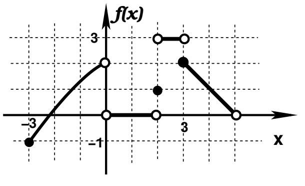


Figura 2.7. Función utilizada en el ejercicio 2.1.4.6, límites

2.1.4.6. ★ *Tarea, límites y valores funcionales:* use la gráfica de la función definida en la figura 2.7 para estimar el valor de cada cantidad. Si la cantidad no existe, explique por qué. La función está definida en el intervalo $[-3, 0) \cup (0, 5)$.

a) $\lim_{x \to -3} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

f) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

[2] No necesariamente hay una relación entre el valor del límite y el valor de la función. Por ejemplo, en la función definida por la figura 2.3, podemos decir que: $\lim_{x \to 0} f(x) =$ *No existe* , y también: $f(0) = 1$; luego en $x = 1$ el límite no existe, pero sí existe el valor funcional. En la misma función tenemos que: $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, dado que tanto $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$, como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$. Sin embargo: $f(5) =$ *No está definido*. Luego en $x = 2$ el límite sí existe, y el valor funcional no está definido. Finalmente: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, y $f(1) = 3$; luego en $x = 1$ el límite sí es igual al valor funcional.

g) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

h) $f(2) =$

i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

j) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

k) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

l) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

m) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$

n) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) =$

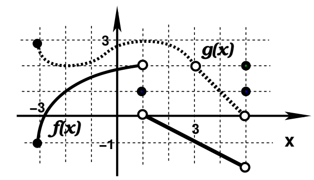


Figura 2.8. Ejercicio 2.1.4.8, límites

2.1.4.7. ★ *Tarea, propiedades de los límites:* dado que: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 0$, usando las propiedades de los límites, encuentre los valores de los siguientes límites. Si no se pueden aplicar las propiedades de los límites, explíquelo.

a) $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) + 5g(x))$

b) $\lim\limits_{x\to 2} (f(x))^2$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{h(x)}$

2.1.4.8. ★ *Tarea, límites por gráfica:* en la figura 2.8 se dan las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, que están definidas en el intervalo $[-3, 5]$. Usando las propiedades de los límites, calcule las siguientes cantidades. Si no se pueden aplicar las propiedades de los límites, explíquelo.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)}{g(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} 3(f(x))^2$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) + g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) + g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

g) $\frac{f(5)}{g(5)}$

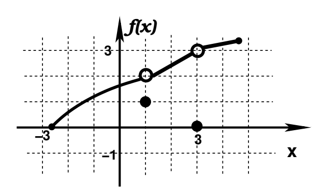


Figura 2.9. Función utilizada en el ejercicio 2.1.4.9, límites

2.1.4.9. • *Tarea, límites por gráfica:* estime el valor del límite:

$$\lim_{x\to 3} f(x) \tag{2.15}$$

para f descrita en la figura 2.9.

2.1.4.10. • *Tarea, leyes de los límites:* evalúe el límite, justificando los pasos (leyes de los límites) que aplica en cada paso:

a) $\lim_{x\to 1} 3x^2 + 2x + 1$

b) $\lim_{x\to 2} 4x^2 + 5x + 3$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{2x^2+1}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{2x^2+1}$

2.2. Métodos de calcular y estimar límites

2.2.1. Límites calculados numéricamente

2.2.1.1. Definición, estimar un límite numéricamente: una forma de *estimar*, o aproximar, el valor de un límite es construir una tabla de valores. Se deben tomar valores de la variable independiente cada vez más cercanos al número a donde se quiere calcular el límite.

2.2.1.2. Ejemplo, estimando límites numéricamente: sean f y g las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x) = x^2 + 9 \quad g(x) = 2x + 3 \tag{2.16}$$

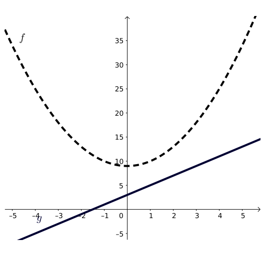


Figura 2.10. Funciones $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 2x + 3$

Lo representamos gráficamente en la figura 2.10.

Estime numéricamente los límites:

1. $\lim_{x\to 2} f(x)$
2. $\lim_{x\to 2} g(x)$

Solución: se calculan los valores de la tabla 2.3.

x	f(x)	g(x)
2.5	15.25	8
2.1	13.41	7.2
2.001	13.004	7.002
1.999	12.996	6.998
1.9	12.61	6.8
1.5	11.25	6

Tabla 2.3. Algunos valores de $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 2x + 3$.

De la tabla se concluye que:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 13 \tag{2.17}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 13 \tag{2.18}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 13 \tag{2.19}$$

También que:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 7 \tag{2.20}$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 7 \tag{2.21}$$

Luego:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 7 \tag{2.22}$$

En el ejemplo anterior se cumple que el límite en 2 es igual al valor funcional:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \tag{2.23}$$

pero, como habíamos dicho antes, no siempre es así.

2.2.1.3. Ejemplo, estimar numéricamente un límite: estime el valor del límite de la función f en -4:

x	$f(x)$
3.9	3.9
3.99	-3.99
3.9999	3.9999
4.00001	4.00001
4.001	4.001
4.1	4.1

Tabla 2.4. Valores de $f(x) = x$ cerca a -4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4} \tag{2.24}$$

La función no está definida en $x = -4$ ¿Qué pasa cuando la variable independiente se acerca a -4?
Allí hay una indeterminación de la función $f(x)$.

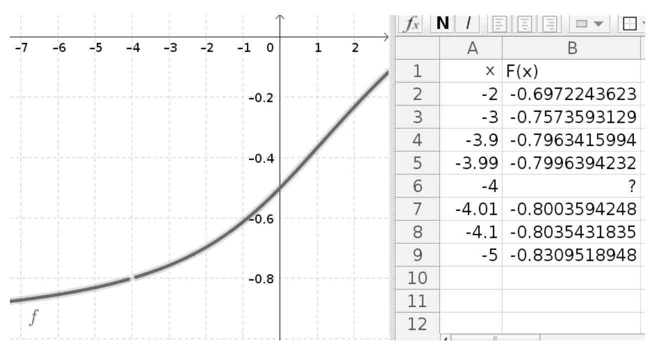


Figura 2.11. Límite *estimado* por tabla y gráfica

Según la tabla el límite se aproxima a -0.8

En este caso

$$\lim_{x \to -4} f(x) \neq f(-4) \tag{2.25}$$

porque $f(-4)$ no está definida.

2.2.1.4. Ejemplo, límite en c de la función $y(x) = x$: para hallar el $\lim_{x \to c} x$, pensemos primero en un valor especial de c, por ejemplo en $c = 4$, como se ve en la tabla 2.4.

De la tabla vemos que $\lim_{x \to 4} x = 4$, dado que tanto el límite por izquierda es igual a 4: $\lim_{x \to 4^-} x = 4$; como el límite por la derecha: $\lim_{x \to 4^+} x = 4$.

2.2.1.5. Definición, límite en $x = c$ de la función $y(x) = x$: siguiendo lo visto en el ejemplo anterior, podemos darnos cuenta de que para cualquier número c vamos a tener que si la función es $f(x) = x$, se cumple tanto que:

$$\lim_{x \to c^-} x = c$$

Como que:

$$\lim_{x \to c^+} x = c$$

Por lo tanto, para esta función (la función $y(x) = x$), tenemos que:

$$\lim_{x \to c} x = c$$

2.2.2. Límites de polinomios

Un polinomio es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Por ejemplo, son polinomios:

$$P(x) = 1 + x^2$$

$$P(x) = 3 + 2x + 7x^3$$

$$P(x) = x^{34}$$

¿Cuál es el $\lim_{x \to c} P(x)$? Pensemos primero en el límite de una potencia. Como:

$$g(x) = x^2 = x \times x$$

Entonces si quisiéramos hallar $\lim_{x \to c} x^2$, podríamos usar la propiedad del producto de funciones y decir:

$$\lim_{x \to c} x^2 = \lim_{x \to c} x \times \lim_{x \to c} x = \left(\lim_{x \to c} x\right)^2$$

Entonces:

$$\lim_{x \to c} x^n = \lim_{x \to c} x \times \ldots \times \lim_{x \to c} x = \left(\lim_{x \to c} x\right)^n$$

¿Se puede simplificar más? ¡Sí! acabamos de ver que el límite $\lim_{x \to c} x = c$, luego:

$$\lim_{x \to c} x^n = c^n$$

El límite en el número c de la potencia x^n es simplemente c^n. Usando también las propiedades de la suma y del producto por constante, concluimos que el límite de un polinomio en c es simplemente el valor del polinomio en c:

$$\lim_{x \to c} P(x) = \lim_{x \to c} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$$

$$= a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \ldots + a_n c^n = P(c)$$

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$$

2.2.2.1. Definición, límite del polinomio $P(x)$ en c: el valor del límite de un polinomio es su valor funcional:

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$$

2.2.3. Concepto de límite algebraico.

2.2.3.1. Definición, formas indeterminadas: existen algunas funciones f, tales que, al calcularlas en algunos valores de la variable independiente $x = c$, se obtienen expresiones $\dfrac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 * \infty$, 0^0, ∞^0, ó 1^∞ El valor funcional en c está indeterminado, es decir, la función *no está definida en* c Estas expresiones se llaman formas indeterminadas, o también *indeterminaciones*.

2.2.3.2. Ejemplo, indeterminación: la expresión

$$f(x) = \frac{x-3}{x^3-27}$$

es indeterminada en $x = 3$, porque si se calcula allí se obtiene:

$$f(3) = \frac{3-3}{3^3-27} = \frac{0}{0}.$$

x	f(x)
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
1	No definida
1.01	2.01
1.1	2.1
1.5	2.5
2	3

Tabla 2.5. Algunos valores de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ cercanos a 1

Como la división entre 0 no está definida, sabemos que la función f no está definida en 3.

Que la función no esté definida no implica nada sobre el límite. De hecho, el límite puede tomar diferentes valores: puede ser igual a 0, puede ser que el límite no exista, o puede ser igual a un valor constante diferente de cero. En lo que sigue aprenderemos estrategias para calcular límites indeterminados.

2.2.3.3. Definición, formas indeterminadas para las que el límite posiblemente existe: sea $f(x)$ una función, queremos averiguar el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$. Si al substituir directamente el valor, es decir, al calcular $f(c)$ se obtiene una forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, entonces se puede intentar hallar el valor utilizando el álgebra. Es decir, se intenta factorizar, y racionalizar la función $f(x)$, buscando una expresión equivalente en la que sea claro el valor de la función.

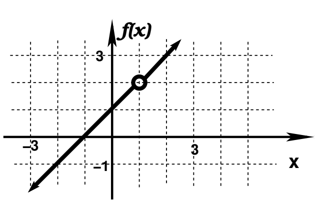


Figura 2.12. Indeterminación de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ en 1

2.2.3.4. Ejemplo, encuentre la indeterminación de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$, y calcule el límite cuando x tiende a ese valor: como la función

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

tiene una indeterminación cuando su denominador se hace cero. Es decir, cuando $x = 1$. Así que la función no está definida allí. Usando la tabla 2.5, se puede estimar el valor del límite, y de paso tener una idea de la forma de la gráfica.

La función está representada gráficamente en la figura 2.12.

La gráfica de la función muestra que se trata de una función lineal definida en todo punto menos en $x = 1$. De hecho, se puede decir que:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \tag{2.26}$$

$$= \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ \text{no definida} & x = 1 \end{cases} \tag{2.27}$$

Es posible calcular el límite, usando las propiedades de los límites:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

El límite existe si existe el siguiente límite (usando la propiedad de límite de un cociente):

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\lim_{x \to 1}(x-1) \lim_{x \to 1}(x+1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)}$$

Ahora, la división entre los límites $\frac{\lim_{x \to 1}(x-1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)}$ se puede estimar numéricamente. Al ir tomando los valores $x \to 1$ se tiene que $(x-1)$ es un número muy pequeño, pero es diferente de cero. Se construye la tabla 2.7.

Y de la tabla 2.7 podemos estimar que:

$$\frac{\lim_{x \to 1}(x-1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)} = 1$$

y por lo tanto:

$$\frac{\lim_{x \to 1}(x-1) \lim_{x \to 1}(x+1)}{\lim_{x \to 1}(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Concluimos que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

x	$(x-1)/(x.1)$
0	$\cancelto{1}{\frac{(-1)}{(-1)}} = 1$
0.5	$\cancelto{1}{\frac{(-0.5)}{(-0.5)}} = 1$
0.9	$\cancelto{1}{\frac{(-0.1)}{(-0.1)}} = 1$
0.99	$\cancelto{1}{\frac{(-0.01)}{(-0.01)}} = 1$
1	$\frac{0}{0}$, No definida
1.01	$\cancelto{1}{\frac{(0.01)}{(0.01)}} = 1$
1.1	$\cancelto{1}{\frac{(0.1)}{(0.1)}} = 1$
1.5	$\cancelto{1}{\frac{(0.5)}{(0.5)}} = 1$
2	$\cancelto{1}{\frac{(1)}{(1)}} = 1$

Tabla 2.7. Algunos valores de la función $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

En resumen, encontramos el número donde la función es indeterminada, que es $x = 1$; pero al calcular el límite encontramos que el límite sí existe y tiene el valor de 2.

> *2.2.3.5. Definición, límite algebraico:* en algunos casos se podrán factorizar los ceros del denominador en el numerador, siguiendo las propiedades de los límites, llegando a expresiones equivalentes donde es sencillo calcular el límite. Estos son los límites calculados algebraicamente.

Ejercicios y tareas

2.2.3.6. • *Tarea, límite numérico:* estime el siguiente límite numéricamente:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{x}}{x^4 - 625}$$

Solución: se deben calcular valores funcionales cercanos a 5, tanto por izquierda como por derecha; tomando varias cifras decimales. Por ejemplo, se puede llenar la tabla 2.8.

4.5	
4.9	
4.99	
4.9999	
5.0001	
5.01	
5.1	
5.5	

Tabla 2.8. Algunos valores de x cerca a 5, para solucionar el ejercicio 2.2.3.6

2.2.3.7. *Ejercicio, límite numérico:* estime el siguiente límite numéricamente:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{x}}{x^4 - 625}$$

2.2.3.8. ★ *Tarea, límite analítico:* para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

a) Calcule analíticamente, o estime, el valor del límite:

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

b) ¿Cuánto vale $f(5)$?

c) ¿En qué se diferencia $f(x)$ de la recta $y = x + 5$?

2.2.3.9. • *Tarea, interpretación en palabras:*

A. Si tenemos la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \tag{2.28}$$

Entonces eso quiere decir que: Cuando x .... entonces $f(x)$ ....

B. ¿Es posible que la expresión (2.28) sea cierta y que al mismo tiempo sea cierto que $f(2) = 3$?

2.2.3.10. • *Tarea, interpretación gráfica:*

A. Explique con un dibujo el significado de la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 \tag{2.29}$$

B. ¿Es posible que la expresión (2.29) sea cierta y que al mismo tiempo sea cierto que $f(0) = 2$? Explique con un dibujo.

2.2.3.11. • *Tarea, límites y valores funcionales:* para cada una de las siguientes expresiones, responda:

I. La función f, ¿está definida en a?

II. ¿Cuánto vale el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

a) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$, $a = 5$

b) $f(x) = \frac{x^2-25}{x}$, $a = 5$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, $a = 3$

d) $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x-1}$, $a = 1$

e) $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x+1}$, $a = 1$

f) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, $a = 1$

g) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+3x-4}$, $a = 1$

2.2.3.12. ★ *Tarea, propiedades de los límites:* si el límite existe, evalúelo. Indique las propiedades de los límites que aplica en cada paso:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x} \tag{2.30}$$

Respuesta en la nota al pie: [3]

[3] La función tiene una indeterminación de la forma $0/0$, ya que al evaluar el numerador

2.2.3.13. Ejercicio, estimar numéricamente: estime el siguiente límite numéricamente:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x}$$

2.2.3.14. ★ *Tarea, límites de funciones definidas a trozos:* para las siguientes funciones definidas a trozos encuentre el valor del límite que se le indica, o explique por qué no existe.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

---

obtenemos:

$$\left((3+x)^3 - 9\right)\Big|_{x=0} = \left(3^3 - 27\right) = 0$$

Y en el denominador $x = 0$. Las indeterminaciones de la forma $0/0$, en algunos casos, son factorizables. Intentemos factorizar. Para este caso, simplificando:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{27 + 3 \times 3^2 x + 3 \times 3x^2 + x^3 - 27}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{27x + 9x^2 + x^3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(27 + 9x + x^2)}{x}$$

Como explicamos al final de la sección, numéricamente se puede evaluar el valor de:

$$\frac{\lim_{x \to 0} x}{\lim_{x \to 0} x}$$

y ese valor es 1. Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(27 + 9x + x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} (27 + 9x + x^2)$$

Aplicando la regla de los límites del límite de una suma:

$$\lim_{x \to 0} (27 + 9x + x^2) = \lim_{x \to 0} 27 + \lim_{x \to 0} 9x + \lim_{x \to 0} x^2)$$

Y evaluando se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} 27 + \lim_{x \to 0} 9x + \lim_{x \to 0} x^2) = 27 + 0 + 0 = 27$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x} = 27$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -3 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-5 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) =$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -5 \leq x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -5 < x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} x+9 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ -2x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -6 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) =$$

g)

$$f(x) = \begin{cases} x+9 & \text{si } -5 < x < -3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 3 \\ -6 & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) =$$

h)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

$$f(1) =$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

i)

$$\lim_{x \to 2^-} \lceil x \rceil =$$

$$\lim_{x \to 2^+} \lceil x \rceil =$$

$$\lim_{x \to 2} \lceil x \rceil =$$

$$\lceil 2 \rceil =$$

2.2.3.15. Ejercicio, estimar límites gráficamente: construya, con ayuda del computador, la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$. Luego, usando esa gráfica como insumo, estime el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

2.2.3.16. ★ *Tarea, estimar límites gráficamente:* construya, con ayuda del computador, la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+x^2}}$. Luego usando esa gráfica estime el valor de los límites.

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

2.2.3.17. • *Tarea, graficar una función con base en los límites:* construya la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

a)
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

b)
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
- $f(2) = 0$
- $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

c)
- $\lim_{x\to -2} f(x)$ No existe
- $f(-2) = 1$
- $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

2.2.3.18. *Ejercicio, graficar una función con base en sus límites:* construya la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

2.2.3.19. *Ejercicio, evaluar un límite numéricamente:* evalúe la función en los números que se indican en la tabla 2.9. Usando esa información estime el valor del límite.

$$f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$$

x	$f(x)$
1.9	
1.99999	
2.00001	
2.1	

Tabla 2.9. Valores de x relacionados con el ejercicio 2.2.3.19

x	$f(x)$
-1.1	
-1.00001	
-0.99999	
-0.9	

Tabla 2.10. Valores de x relacionados con el ejercicio 2.2.3.20

2.2.3.20. Ejercicio, estimar límites numéricamente: evalúe la función en los números que se indican en la tabla 2.9. Usando esa información estime el valor del límite.

$$f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$$

2.2.3.21. ★ *Tarea, estimar límites numéricamente:* construya una tabla y estime el límite numéricamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x}$$

2.2.3.22. Ejercicio, estimar límites numéricamente: construya una tabla y estime el límite numéricamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16} - 4}{x}$$

2.2.3.23. Ejercicio, estimar límites numéricamente: construya una tabla y estime el límite numéricamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$$

2.2.3.24. Ejercicio, determinar el error:

a) ¿Cuál es el error de la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) La siguiente ecuación, ¿es correcta? Si no lo es, ¿cuál es el error?

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x+3)$$

2.2.3.25. • *Tarea, hallar límites:* encuentre el valor de cada uno de los siguientes límites, si existen.

a) $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{|x+3|}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{2x+6}{|x+3|}$

c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

d) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

2.2.3.26. Ejercicio, álgebra: si se tiene que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = 10 \tag{2.31}$$

entonces ¿cuánto vale el $\lim_{x\to 1} f(x)$?
Respuesta en la nota al pie [4]

2.2.3.27. Ejercicio, álgebra: Si se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5 \tag{2.35}$$

entonces ¿cuánto valen los siguientes límites?

a) $\lim_{x\to 0} f(x) =$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} =$

[4] Si se tiene que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = 10 \tag{2.32}$$

Entonces eso quiere decir que:

$$f(x) - 8 = g(x)(x-1)$$

Para que tengamos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)g(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} g(x) = 10 \tag{2.33}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = g(x)(x-1) + 8$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (g(x)(x-1) + 8) = 10 * 0 + 8 = 8 \tag{2.34}$$

2.3. Asíntotas, continuidad, y límites infinitos y en el infinito (tema opcional)

x	$f(x)$
1	0.36364
10	0.32208
1000	0.33322
1×10^6	0.33333
$\to \infty$	

Tabla 2.11. Algunos valores de la función $f(x) = \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7}$

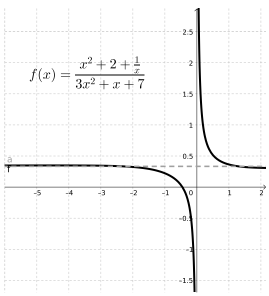


Figura 2.13. Gráfica, en cercanías de 0 de las funciones: $f(x) = \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7}$, línea continua; y $g(x) = 1/3$, línea cortada

2.3.1. Límites en el infinito y asíntotas horizontales

2.3.1.1. Definición, límites en el infinito: si, cuando x se hace muy grande, es decir $x \to \infty$, la función se acerca a algún valor M, se dice que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = M, \tag{2.36}$$

que se lee como: *el límite de la función f cuando x tiende a infinito es M*. De la misma manera, si x se hace muy negativo, es decir $x \to -\infty$, la función se acerca a algún valor M, se dice que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M, \tag{2.37}$$

se lee como: *el límite de la función f cuando x tiende a menos infinito es M*.

2.3.1.2. Ejemplo, límite en el infinito: ¿cuál es el valor del siguiente límite?

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7}$$

Solución: La función se puede representar también por su gráfica, figura 2.13.

Pareciera que al tomar valores cada vez más grandes de x se tiende a un valor mayor a 0 y menor a 0.5. El límite se puede estimar usando una tabla, como por ejemplo la tabla 2.11.

Por lo tanto se estima numéricamente que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2+\frac{1}{x}}{3x^2+x+7} = 0.33$$

2.3.1.3. Definición, asíntotas horizontales: si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$), con L un número real (es decir, no es $+\infty$ o $-\infty$) la función f tiene una asíntota horizontal en $y = L$.

2.3.2. Límites infinitos y asíntotas verticales

Pensando en la función $f(x) = 1/x^2$. ¿Cuál es el valor de $f(0)$? Al evaluar tendríamos que dividir por 0, luego la función tiene una indeterminación de la forma $1/0$.

¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$? Podemos estimar este límite cuando $x \to 0$ numéricamente construyendo la tabla 2.12.

x	$f(x)$
-0.2	25
-0.1	100
-0.01	10000
-0.001	1000000
0	$\nexists$
0.001	1000000
0.01	10000
0.1	100
0.2	25

Tabla 2.12. Algunos valores de la función $f(x) = 1/x^2$

A medida que x se acerca a 0 el valor de la función crece sin límite, tanto por la izquierda como por la derecha. No existe un número en los reales que sea mayor que todos los demás números, por lo tanto este límite *no existe*. De todas formas, dado que sabemos que f crece sin cota a medida que x se acerca a 0, se escribe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Lo que se lee: *el límite de la función $1/x^2$ cuando x tiende a c es mas infinito*; o en general:

> *2.3.2.1. Definición, límite infinito:* dada una función f y un valor $x = c$. Si la función toma valores cada vez más grandes a medida que x se acerca a c, es decir, cuando $x \to c$, entonces:
>
> - El $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe,
> - El $\lim_{x\to c} f(x)$ tiende a infinito, lo que se escribe como: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Lo que se lee: *el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c es más infinito*.

Resumiendo: si la función crece sin límite cuando la variable independiente tiende a un valor, el límite no existe y se escribe *límite tiende a infinito.*

> *2.3.2.2. Definición, límite menos infinito:* dada una función f y un valor $x = c$. Si la función toma valores cada vez más negativos a medida que x se acerca a c, es decir, cuando $x \to c$, entonces:
>
> - El $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe,
> - El $\lim_{x\to c} f(x)$ tiende a menos infinito, lo que se escribe como:

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. Lo que se lee: *el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c es menos infinito.*

2.3.2.3. Ejemplo, límite en menos infinito: tomemos la función definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \left(10x - \frac{5}{(x-4)^2}\right) \tag{2.38}$$

La representación gráfica es la siguiente:

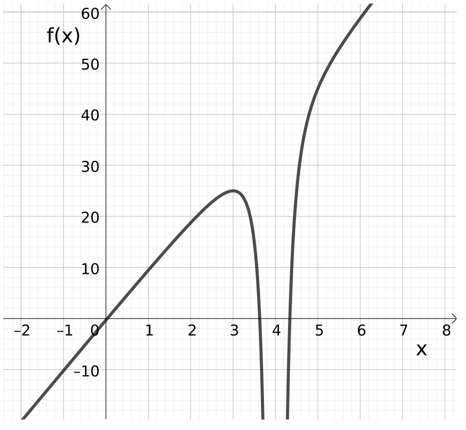


Figura 2.14. Representación gráfica de la función $f(x) = \left(10x - \frac{5}{(x-4)^2}\right)$, para calcular $\lim_{x \to 4} f(x)$

Se puede ver de la representación gráfica, en la figura 2.14, que en este caso cuando $x \to 4$ la función toma valores cada vez más negativos. Entonces se dice que:

$$\lim_{x \to 4} \left(10x - \frac{5}{(x-4)^2}\right) = -\infty$$

2.3.2.4. Definición, asíntotas verticales: además de los dos casos presentados anteriormente, también se puede tener que los límites laterales en torno a $x = a$ sean infinitos, es decir, tenemos seis posibles casos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{2.39}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{2.40}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \tag{2.41}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \tag{2.42}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \tag{2.43}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \tag{2.44}$$

Si una función f, en $x = a$, cumple al menos una de las anteriores cuatro condiciones se dice que la función tiene una asíntota vertical localizada en $x = a$. La asíntota vertical es una línea hacia la cual la función se acerca (por izquierda, derecha o ambos lados), sin llegar nunca a ella.

Hemos incluido una posible representación gráfica de éstos seis casos en las figuras 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 y 2.20.

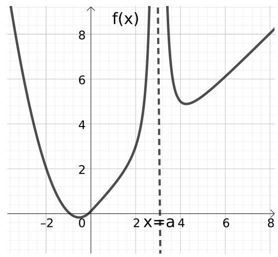


Figura 2.15. Límite infinito $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

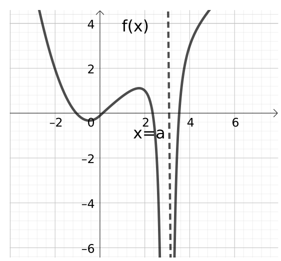


Figura 2.16. Límite en menos infinito $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

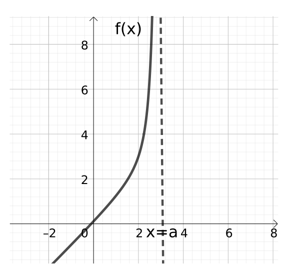


Figura 2.17. Límite infinito por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

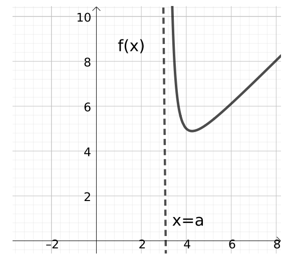


Figura 2.18. Límite infinito por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

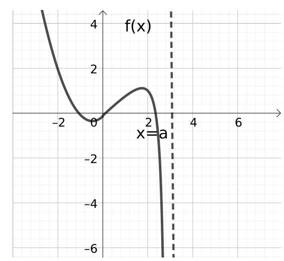


Figura 2.19. Límite a menos infinito por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

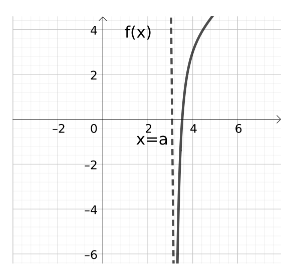


Figura 2.20. Límite a menos infinito por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, correspondiente a una asíntota vertical en $a = 3$

2.3.3. Continuidad

2.3.3.1. Definición, función continua: una función f es continua en un número a si se cumple que:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe,
2. $f(a)$ existe, y
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si no se cumple alguna de estas condiciones, la función es discontinua en a.

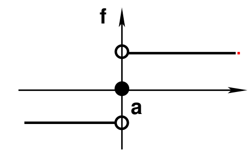


Figura 2.21. La función es discontinua en $a = 0$ porque el límite no existe

Es decir, la función f puede ser discontinua si:

1. f está definida en $x = a$, pero $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe; como se ve en la figura 2.21.
2. El límite existe:
$$\lim_{x\to a} f(x) = M$$
y f está definida en $x = a$, pero el valor del límite es diferente al valor funcional; como se ve en la figura 2.22.
3. El límite existe:
$$\lim_{x\to a} f(x) = M,$$
pero f no está definida en $x = a$, como se ve en la figura 2.23.
4. Ni el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ni f está definida en $x = a$, cómo se ve en la figura 2.24.

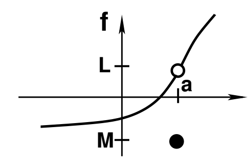


Figura 2.22. La función es discontinua en a porque el valor del límite es diferente al valor funcional

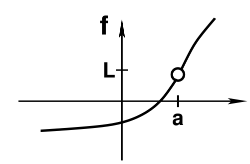


Figura 2.23. La función es discontinua en a porque no está definida allí

2.3.3.2. Definición, continuidad en un intervalo: una función f es *continua sobre un intervalo I* si es continua para todo $x \in I$.

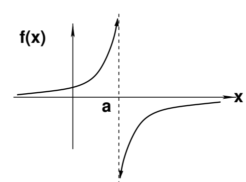


Figura 2.24. La función es discontinua porque el límite en a no existe y porque no está definida allí

2.3.3.3. Ejemplo, continuidad de $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$: la función es discontinua en $x = 0$, como se puede ver en la figura 2.25

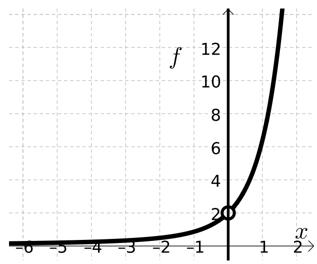


Figura 2.25. Discontinuidad en el punto $(0, 2)$

Equivalentemente se puede decir que sus intervalos de continuidad son: $(-\infty, 0), (0, \infty)$

2.3.3.4. Definición, clasificación de continuidad según su dominio: ¿dónde es continua la función? Una función puede ser:

1. Continua en todos los reales: $\mathbb{R}$

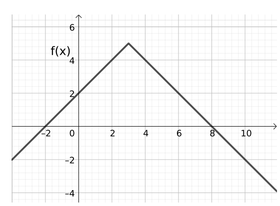


Figura 2.26. Función continua en $\mathbb{R}$

2. Continua en su dominio: $\mathcal{D}(f)$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Continua en $(-\infty, 0), (0, \infty)$.

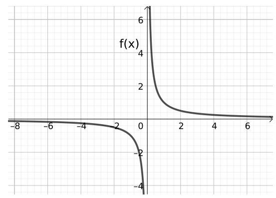


Figura 2.27. Función continua en su dominio

3. Discontinua:

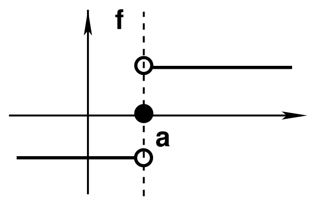


Figura 2.28. Función discontinua

2.3.3.5. Definición, discontinuidad removible: dada una función f, que es discontinua en a. Si el límite existe, entonces la discontinuidad es removible. Se remueve asignando el valor del límite.
Es decir, si: $\lim_{x\to a} f(x) = L$, pero $f(a) \neq L$, entonces f es discontinua en a, pero la discontinuidad es removible y se remueve definiendo g así:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } \ x \neq a \\ \lim_{x\to a} f & \text{if } \ x \neq a \end{cases} \tag{2.45}$$

2.3.3.6. Ejemplo, discontinuidades removibles y no removibles:

1. Si f tiene un salto en a la discontinuidad no es removible, porque el límite no existe; como es el caso representado en la figura 2.21.
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = M$, pero f toma un valor diferente al valor del límite, la discontinuidad es removible; como es el caso representado en la figura 2.22.

3. Si el límite existe:
$$\lim_{x \to a} f(x) = M,$$
pero f no está definida en $x = a$, la discontinuidad es removible; como es el caso representado en la figura 2.23.

4. Si ni el $\lim_{x \to a} f(x)$ existe ni f está definida en $x = a$ la discontinuidad no es removible; como es el caso representado en la figura 2.24.

1.9	
1.99999	
2.00001	
2.1	

Tabla 2.13. Valores de la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ cerca al número 2

2.3.3.7. Ejemplo, determine si la singularidad de la función: $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$, en $x = 2$, es removible o no removible: para explorar la solución numéricamente se puede construir una tabla de datos que nos da los valores de la función cerca a 2, la tabla 2.13.

O, con ayuda de un computador, podemos graficar la función (figura 2.29).

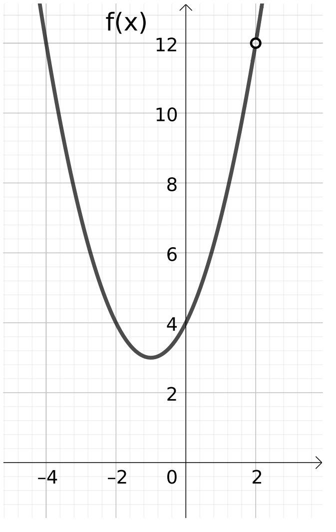


Figura 2.29. La representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$

Analíticamente: el valor exacto del límite se puede calcular analíticamente, usando la factorización de cubos.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{\cancelto{1}{\lim\limits_{x \to 2}(x-2)} \lim_{x \to 2}(x^2+2x+4)}{\cancelto{1}{\lim\limits_{x \to 2}(x-2)}}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 12$$

Conclusión: la discontinuidad es removible si se redefine la función añadiendo el punto $(2, 12)$.

Se puede remover la discontinuidad, redefiniendo la función f mediante una nueva función g; que no es discontinua en 2.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 2 \\ 12 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2.3.3.8. Definición, clasificación de discontinuidad según la forma de la gráfica: discontinuidad de salto: si tanto $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ como $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existen, pero toman valores distintos. Por ejemplo el caso representado en la figura 2.21. *Discontinuidad infinita*: cuando el límite es infinito (o menos infinito).

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

o

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

2.3.4. Teoremas de continuidad

2.3.4.1. Definición, continuidad de productos y cociente de funciones: si f y g son continuas en $x = a$ y c es una constante, entonces las siguientes funciones también son continuas en $x = a$:

- $f + g$

- $f - g$
- cf
- fg
- $\frac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

2.3.4.2. Definición, continuidad de polinomios y funciones racionales:

- Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio, $(-\infty, \infty)$.
- Cualquier función racional es continua siempre que esté definida, es decir, en su dominio.

2.3.4.3. Definición, algunas funciones continuas en los reales: los siguientes tipos de funciones son continuas en todos los reales:

- Polinomiales
- $\sin x$
- $\cos x$
- e^x

2.3.4.4. Definición, algunas funciones continuas en su dominio: los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

- Racionales
- $\sqrt{x}$
- Trigonométricas
- Trigonométricas inversas

- Exponenciales
- Logarítmicas

En el siguiente capítulo conectaremos el concepto de límite con el de continuidad. Al respecto una lectura para la mente curiosa es el texto "Monstruos no derivables", de Bartolo Luque (Luque, 2019).

2.3.5. Métodos para límites al infinito de funciones racionales: la técnica de l'Hôpital

En el capítulo anterior vimos algunos límites de la forma $0/0$ e ∞/∞, como:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ **límite de la forma** $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x-4}{x-1}$ **límite de la forma** $\frac{\infty}{\infty}$

Una forma de intentar hallar los límites es la factorización. Resulta que hay una forma más fácil, llamada técnica de L'Hôpital

2.3.5.1. Definición, técnica de l'Hôpital: si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones diferenciables, y al sustituir $x = a$ en la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{2.46}$$

si este límite existe. Es decir, podemos reemplazar f y g por sus derivadas e intentar hallar el nuevo límite. *Nota:* es posible que el nuevo límite vuelva a terminar en una forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$; en ese caso se puede volver a aplicar la técnica de l'Hôpital.

2.3.5.2. Ejemplo, técnica de l'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$. Es del tipo $\frac{0}{0}$, luego se calcula:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3-8\right) = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(x-2\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{1} = \lim_{x\to 2} 3x^2 = 3 \times 4 = 12$$

Como el límite existe, entonces:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$$

2.3.5.3. Ejemplo, técnica de l'Hôpital: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x-1}$. Es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\frac{d}{dx}(2x-4)=2$$

$$\frac{d}{dx}(x-1)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=2$$

Como el límite existe, entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x-1}=2$$

2.3.6. Apéndice: cálculo de límites infinitos de funciones radicales

Para funciones de la forma:

a. $f(x)=\sqrt{P(x)}$

b. $g(x)=\sqrt{P(x)}+Q(x)$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, una forma de calcular el límite analítico consiste en racionalizar. Es decir:

a. $f(x)=\sqrt{P(x)}=\sqrt{P(x)}\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{P(x)}}=\frac{P(x)}{\sqrt{P(x)}}$

b.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{P(x)}+Q(x) \\ &= \left(\sqrt{P(x)}+Q(x)\right)\frac{\sqrt{P(x)}-Q(x)}{\sqrt{P(x)}-Q(x)} \\ &= \frac{P(x)-Q(x)^2}{\sqrt{P(x)}-Q(x)} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Después de racionalizar, usualmente se puede aplicar la técnica de dividir por la potencia más alta.

2.3.6.1. Ejemplo, racionalización: Calcule el $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x}-3x)$*:* vemos que la función es de la forma (b), es decir, la raíz de un polinomio más otro polinomio. Se racionaliza, siguiendo la fórmula en (2.47):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x}-3x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left((\sqrt{9x^2+x}-3x)\frac{(\sqrt{9x^2+x}+3x)}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(9x^2+x+3x)-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, si dividiendo entre la mayor potencia, x se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{9x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{3x}{x}}$$

Y simplificando la expresión desde lo algebraico, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}$$

Y aplicando lo anteriormente expuesto:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x}-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{6}$$

Desde el punto de vista analítico y gráfico, el resultado anterior, implica que la recta $y=\frac{1}{6}$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)=\sqrt{9x^2+x}-3x$.

2.3.7. Apéndice: cálculo de límites infinitos de funciones racionales de dos polinomios, método 1

Para la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios, con grados n y m, tenemos tres casos:

- *El numerador crece más rápido que el denominador:* si el grado de P es mayor que el grado de Q: $n > m$, entonces:

  1. Si n, m tienen el mismo signo: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
  2. Si n, m tienen signos distintos: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

- *El denominador crece más rápido que el numerador:* si el grado de P es menor que el grado de Q: $n < m$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

- *El denominador y el numerador crecen a la misma tasa:* si el grado de P es igual al grado de Q: $n = m$, entonces el límite es la razón entre los coeficientes principales (de más alto grado).

$$P = ax^n + ... + c$$

$$Q = bx^m + ... + d$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P}{Q} = \frac{a}{b}$$

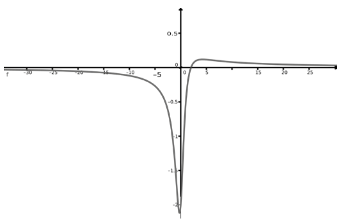


Figura 2.30. Función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

2.3.8. Apéndice: cálculo de límites infinitos de funciones racionales de dos polinomios, método 2

El método consiste en dividir por la potencia más alta

2.3.8.1. Ejemplo, ¿cómo se comporta la función: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ para x muy negativos?: la representación gráfica de la función para valores de la variable independiente en el intervalo $(-35, 30)$, es la figura 2.30.

Al dividir por la potencia más alta:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)\left(\frac{1/x^2}{1/x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Por lo tanto concluimos que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2+1} = 0$.

Ejercicios y tareas

2.3.8.2. Ejercicio, definiciones:

1. Diga cuáles son las tres condiciones que se deben cumplir para que una función f sea continua en $x = a$.
2. Con dibujos y textos, explique los tipos de discontinuidad: de salto, removible e infinita.

2.3.8.3. Ejercicio, encontrar límites: encuentre el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x+3}{-6x^3+4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+3}{-8x^2+4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+3}{-6x^2+4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3-2x+3}{6x^2+1}$

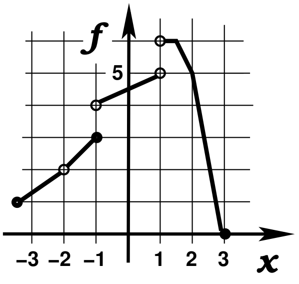


Figura 2.31. Ejercicio 2.3.8.4

2.3.8.4. Ejercicio, continuidad gráfica: en la figura 2.31 se muestra la gráfica de la función f. Si $\lim\limits_{x\to k} f(x)$ existe, pero f *no es continua en* k, ¿cuál es el valor de k?

Opciones de respuesta:

a) $k = -2$

b) $k = -1$

c) $k = 1$

d) $k = 2$

e) $k = 3$

2.3.8.5. ● *Tarea, asíntotas:* para la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, es cierto que:

I $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

II Tiene una asíntota vertical en $x = 2$

III $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

IV Tiene una asíntota vertical en $x = -2$

Respuesta en la nota al pie: [5]

[5] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ y tiene una asíntota vertical en $x = 2$

2.3.8.6. • *Tarea, explicar en palabras:* explique con palabras el significado de:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$ b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

2.3.8.7. ★ *Tarea, representación gráfica:* para cada una de las siguientes expresiones, haga una gráfica que cumpla la característica:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$ b) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

2.3.8.8. • *Tarea, límites gráficos:* se da la gráfica de la función f.:

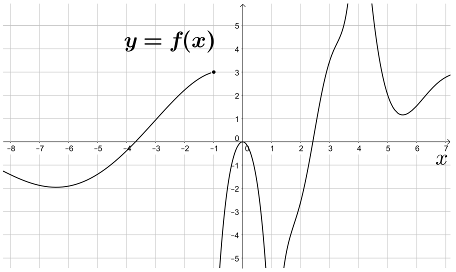


Figura 2.32. Ejercicio 2.3.8.8, continuidad

Encuentre

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)$$

Opciones de respuesta:

a) 3

b) 1

c) $-\infty$

d) 0

e) No existe

Respuesta en la nota al pie: [6]

2.3.8.9. *Ejercicio, hallar límites:* encuentre el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x+3}{-6x^3+4}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+3}{-8x^2+4}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+3}{-6x^2+4}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3-2x+3}{6x^2+1}$

[6] 3, es decir, A.

2.3.8.10. • *Tarea, límites y asíntotas:* para la función representada en la figura 2.33, es correcto afirmar que (marque todas las respuestas correctas):

I $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$

II $\lim\limits_{x\to 3} y(x) = y(3)$

III Es continua en su dominio.

IV Presenta una discontinuidad asintótica en $x = 0$.

Respuesta en la nota al pie: [7]

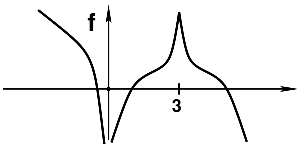


Figura 2.33. Ejercicio 2.3.8.10, gráfica de continuidad

2.3.8.11. ★ *Tarea, continuidad:* encuentre los valores de c para los cuales la función f sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 3 + cx^2 - 5x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -cx^4 - cx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2.3.8.12. • *Tarea, continuidad:* para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

es cierto que (marque todas las verdaderas):

I f es discontinua en $x = 1$

II $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

III $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

IV f es discontinua en $x = 3$

Respuesta en la nota al pie: [8]

2.3.8.13. ★ *Tarea, continuidad:* para la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

[7] $\lim\limits_{x\to 3} y(x) = y(3)$ y presenta una discontinuidad asintótica en $x = 0$.

[8] $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

Es cierto que (marque todas las verdaderas):

I f es discontinua en $x = 1$

II $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

III $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

IV f es discontinua en $x = 3$

Respuesta en la nota al pie: [9]

2.3.8.14. • *Tarea, intervalos de continuidad de funciones definidas a trozos:* encuentre el intervalo de continuidad de la siguiente función. Explique por qué es ese. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

2.3.8.15. • *Tarea, remover una discontinuidad:* ¿cómo podría *remover la discontinuidad* de la siguiente función? Es decir, ¿cómo redefiniría la función en un número para que sea continua?

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

2.3.8.16. ★ *Tarea, remover una discontinuidad:* ¿Cómo podría *remover la discontinuidad* de la siguiente función? Es decir, ¿cómo redefiniría la función en un número para que sea continua?

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

2.3.8.17. ★ *Tarea, intervalos de continuidad:* encuentre el intervalo de continuidad de la siguiente función. Explique por qué es ese.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

[9] $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

2.3.8.18. • *Tarea, continuidad:* el valor de a para que la función f sea continua

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -3 \\ ax & \text{si } -3 < x < 3 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

es:

a) $a = \frac{1}{9}$

b) No hay ningún valor, la función siempre tiene una discontinuidad de salto.

c) $a = \frac{1}{6}$

d) $a = 3$

Respuesta en la nota al pie: [10]

2.3.8.19. • *Tarea, continuidad:*

1. Diga cuáles son las tres condiciones que se deben cumplir para que una función, f sea continua en el punto $x = a$.

2. Con dibujos y textos, explique los tipos de discontinuidad: de salto, removible e infinita

2.3.8.20. ★ *Tarea, continuidad:* para cada una de las siguientes expresiones, responda:

I La función f, ¿está definida en a?

II ¿cuánto vale el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

III ¿La función es continua en a?

a) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x} + \frac{1}{x}$; $a = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{x-10} - \frac{20}{x^2-100}$; $a = 10$

c) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{x+9}\right)$; $a = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{16}\right)$; $a = 1$

---

[10] $a = \frac{1}{9}$

2.3.8.21. • *Tarea, continuidad:* para cada una de las siguientes expresiones, responda:

I La función $f(x)$, ¿está definida en a?

II ¿cuánto vale el $\lim_{x\to a} f(x)$?

III ¿La función es continua en a?

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}, a = 9$

b) $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-2}, a = 2$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}, a = 0$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}, a = 5$

e) $f(x) = \frac{25-x}{5-\sqrt{x}}, a = 25$

2.3.8.22. • *Tarea, interpretación de los límites:* para cada una de las siguientes expresiones, escriba en palabras como se lee:

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = x$

b. $\lim_{x\to A} f(x) = \infty$

2.3.8.23. • *Tarea, explicación de los límites:* para cada una de las siguientes expresiones, explique qué quieren decir, en palabras.

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = x$

b. $\lim_{x\to A} f(x) = \infty$

2.3.8.24. • *Tarea, continuidad:* Explique si las siguientes funciones son funciones continuas o funciones discretas.

a. La función que da el número de estaciones de transmilenio recorridas por un estudiante en viajar a la universidad.

b. La función que determina el precio de una carrera de taxi.

c. La función que determina la altura sobre el nivel del mar de cada uno de los pisos de un edificio.

d. La temperatura como función del tiempo.

2.3.8.25. ★ *Tarea, evaluar o estimar límites:* si el límite existe, evalúelo. Si no, estímelo numéricamente:

a. $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x+2}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

c. $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$

d. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

2.3.8.26. ★ *Tarea, evaluar o estimar límites:* si el límite existe, evalúelo. Si no, estímelo numéricamente:

a. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x-2}{2x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^3-x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+x^2}{2x-x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}+x^2}{2x-x^2}$

2.3.8.27. ★ *Tarea, asíntotas:* encuentre las asíntotas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

b. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

c. $f(x) = \frac{1+x^4}{x^2-x^4}$

d. $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-33}$

e. $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

2.3.8.28. • *Tarea, discontinuidad:* explique por qué cada una de las funciones es discontinua. Diga dónde es discontinua.

a. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

b. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ 1-2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2.3.8.29. • *Tarea, límites:* calcule los siguientes límites. Use l'Hôpital si se puede. Si no se puede, explique por qué.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

c. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{1-\cos x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{1-\cos x}$

2.3.8.30. ★ *Tarea, límites:* calcule los siguientes límites. Use l'Hôspital si se puede. Si no se puede, explique por qué.

a. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}}{3+x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

c. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

d. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^{-1}-2^{-1}}{h}$

2.3.8.31. • *Tarea, indeterminaciones:* dado que:

- $f(a) = 0$
- $g(a) = 0$
- $h(a) = 1$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to a} p(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to a} q(x) = \infty$

¿Cuáles de las siguientes expresiones son formas indeterminadas? ¿Qué tipo de indeterminación tienen?

a. $\left.\frac{f(x)}{g(x)}\right|_{x=a}$

b. $\left.\frac{h(x)}{g(x)}\right|_{x=a}$

c. $\left.\frac{g(x)}{h(x)}\right|_{x=a}$

d. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{p(x)}$

e. $\lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{p(x)}$

f. $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{f(x)}$

g. $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

Capítulo 3

La derivada

DAVID JULIAN MOLINA BELTRAN

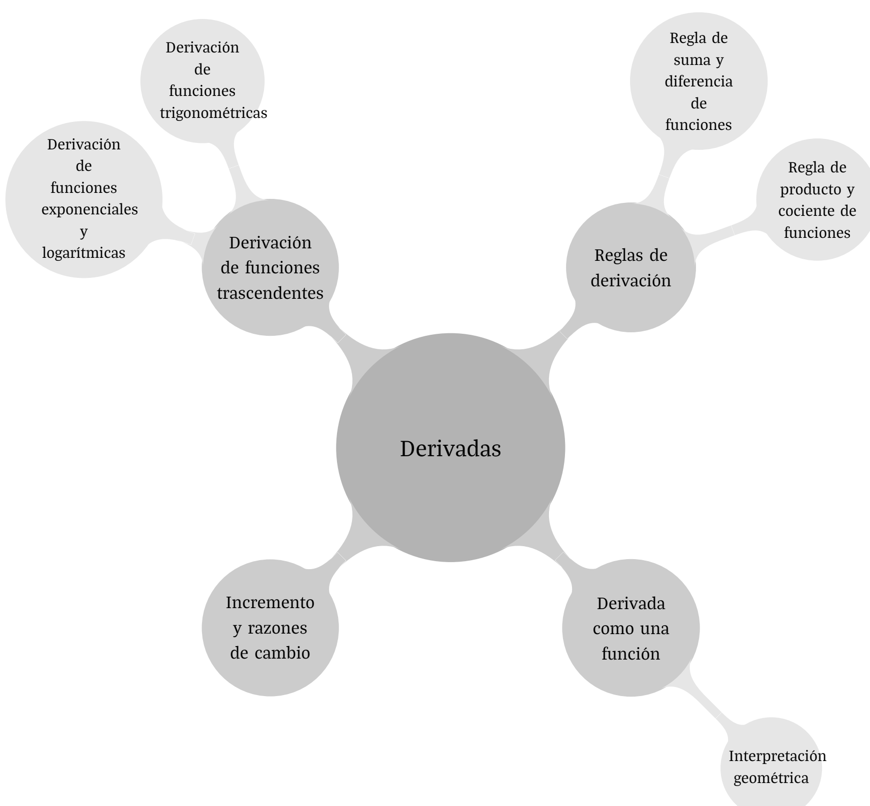


Figura 3.1. La derivada

El precio del dólar ha significado la subida del valor de alimentos durante el año 2022 en Colombia y en la mayoría de los países del mundo. Guerra en Europa y cambios políticos locales propician estas variaciones. ¿Es interesante seguirles la pista a estas variaciones? ¿Acaso son importantes? (Capitalcolombia.com, 2022).

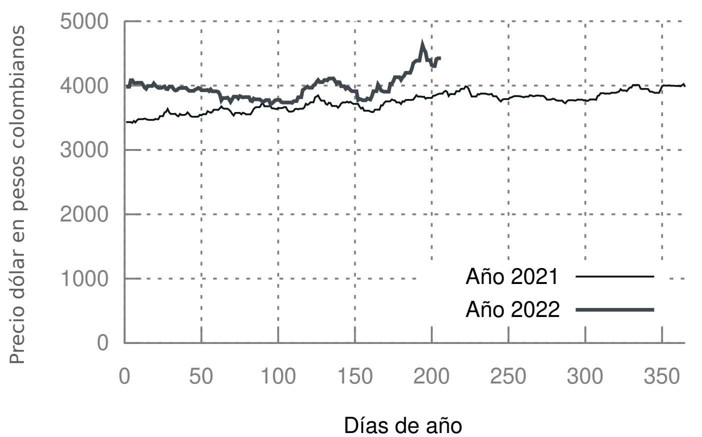


Figura 3.2. Variación de precios del dólar en 2021 y hasta julio de 2022 con respecto al día del año. ¿Serán importantes los cambios de dicha divisa? Fuente de los datos: (Capitalcolombia.com, 2022)

En esta unidad se estudiarán las variaciones de funciones en una variable y sus implicaciones en ámbitos económicos y de la administración.

En primera instancia serán abordados los conceptos de incremento y razón media de cambio, posteriormente, se introducirá la derivada como un límite especial. Serán presentadas las reglas de derivación y al final se expondrá la derivación de funciones exponenciales logarítmicas y trigonométricas básicas.

3.1. Incremento y razón media de cambio

3.1.1. Incremento

Cuando dos variables están relacionadas, un cambio en una de ellas puede afectar a la segunda. Por ejemplo, las variaciones del costo del acero pueden afectar fuertemente la proyección económica del costo total de una infraestructura en construcción, como lo muestran algunas noticias económicas a nivel nacional (Bloomberg Línea, 2022).

Los incrementos o en general los cambios se suelen representar por la letra griega Δ (léase "delta"). Por ejemplo:
Δt podría representar un incremento o variación temporal o simplemente $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$.
ΔP podría representar la variación de precio de algún insumo $\Delta P = P_{final} - P_{inicial}$
Δx podría representar el cambio de producción de una empresa $\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$
De esta manera, también se puede encontrar el cambio respectivo en la variable dependiente, dada una función $y(x)$
Lo anterior se resume a continuación:

3.1.1.1. Definición, incremento o variación: Δx y Δy representan los incrementos o variaciones de las variables independiente y dependiente respectivamente.
$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$
$\Delta y = y(x_{final}) - y(x_{inicial})$

En los siguientes ejemplos se ilustra el uso de la definición mencionada.

3.1.1.2. Ejemplo, precios: suponga que el precio de cultivo de maíz por hectárea se presenta a continuación como función del precio del dólar (USD) en COP (pesos colombianos).

$$y(x) = 4000 + 10\sqrt{x} \tag{3.1}$$

Dada la situación en 2022, el precio del dólar ha cambiado significativamente en Colombia. Calcular el incremento del precio de cultivar maíz por hectárea cuando ha habido un cambio del precio del dólar USD de \$4000 COP hasta \$4500 COP.
Solución: en este caso el equivalente del dólar en COP se ha simbolizado con la letra x por tanto, según la información dada, su cambio será:

$$\Delta x = 4500 - 4000$$

Usando estos valores del dólar (\$4000 COP y \$4500 COP) se calcula el precio de cultivo de maíz por hectárea representado por la función y y se obtienen los siguientes resultados:

$$y(4500) = 4000 + 10\sqrt{4500} = \$4670.82 \text{ COP}$$

$$y(4000) = 4000 + 10\sqrt{4000} = \$4632.45 \text{ COP}$$

De esta manera el incremento en el costo en pesos colombianos se calcularía:

$$\Delta y = 4670.82 - 4632.45 = \$38.37 \text{ COP}$$

Es posible, adicionalmente, realizar un gráfico para evidenciar las variaciones calculadas.

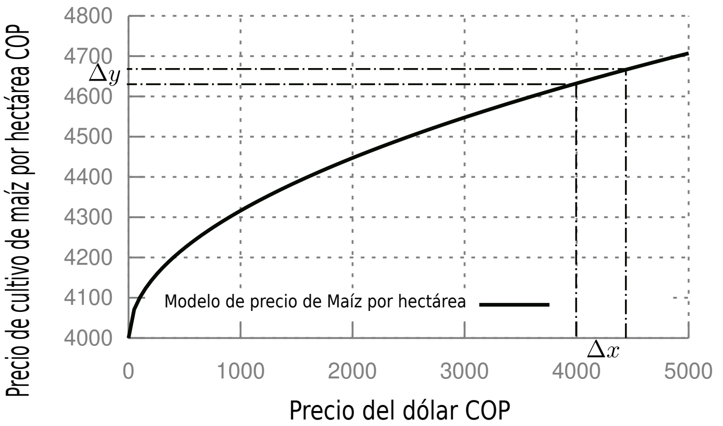


Figura 3.3. Precio de maíz por hectárea cultivada contra el precio del dólar USD en COP en un sencillo modelo de estudio. En la gráfica es posible evidenciar los cambios en las variables dependiente e independiente

En la figura 3.3 se observan los incrementos Δx y Δy que ya han sido calculados. En este caso se observa que un aumento de la variable independiente genera, así mismo, un aumento en la variable dependiente. Sin embargo, es posible que un incremento en la variable independiente genere una disminución en la variable dependiente. Como se observa en el siguiente ejemplo.

3.1.1.3. Ejemplo, acciones de Nutresa: en la figura 3.4 se presentan los datos reales del histórico del valor de la acción de Nutresa (Investing.com, 2022a) desde el primero de agosto de 2021 hasta el 24 de julio de 2022. Utilizando los puntos señalados en la figura 3.4, calcular:

- Incremento Δx
- Incremento Δy

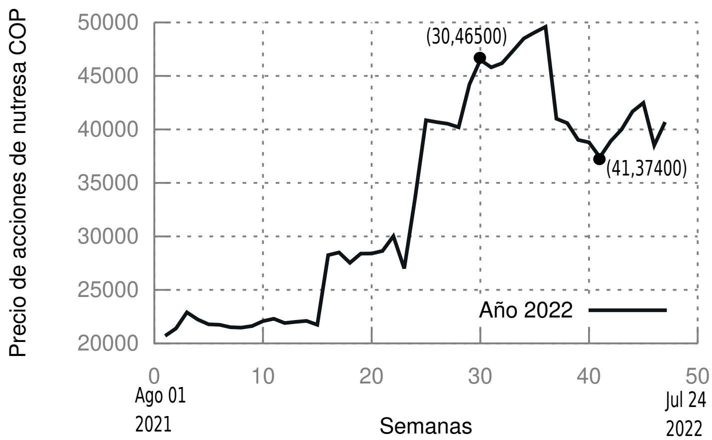


Figura 3.4. Valor de acciones de Nutresa entre 01 de agosto del 2021 hasta el 24 de julio de 2022. Datos provenientes de (Investing.com, 2022a)

Solución: se observa en la figura 3.4 que los puntos de interés para el ejercicio son entre la semana 30 cuando el valor de la acción es de 46500 COP y la semana 41 cuando el valor es de 37400 COP. Por lo tanto:

- $\Delta x = 41 - 30 = 11$ semanas
- $\Delta x = 37400 - 46500 = -9100$ COP

En este caso se aprecia una ligera caída en el precio de las acciones de Nutresa y por esta razón la variación Δy es negativa.

3.1.2. Razón media de cambio

Se observó en la anterior sección que no hubo realmente alguna restricción en el tamaño del incremento Δx, por ahora se continuará con esta libertad. La variación Δx se asocia a un tipo de “paso”, con la cual se recorre el dominio de la función a analizar, cualquiera que sea su significado o unidad. (Por ejemplo Δx es una semana en la figura 3.4 o podría ser $\Delta x = 50$ días en la figura 3.2). En todo caso es posible ver que si

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial} \rightarrow x_{final} = x_{inicial} + \Delta x \tag{3.2}$$

Sin embargo, dado que $x_{inicial}$ es cualquier valor del dominio de x es factible "olvidar" estos subíndices y simplemente escribir:

$$\Delta y = f(x_{inicial} + \Delta x) - f(x_{inicial}) \rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{3.3}$$

La razón entre Δx y Δy compara las variaciones de las dos variables y por tanto dicha razón es una cantidad de completo interés denominada **razón media de cambio**:

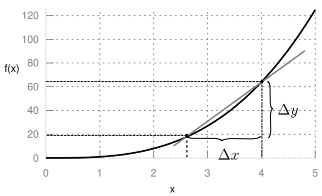


Figura 3.5. Función arbitraria en la que se muestra las variaciones en la variable dependiente e independiente. El cociente entre las variaciones Δy y Δx establecen la razón de cambio

3.1.2.1. Definición, razón media de cambio o tasa media de cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ con } \Delta x \neq 0 \tag{3.4}$$

La anterior ecuación (ver Ec. 3.4) expresa la variación de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x dentro de un intervalo $x + \Delta x$ que pertenece al dominio de la función, como se observa en la figura 3.5. La razón media de cambio se considera una herramienta fundamental de amplio uso en ciencias naturales, economía y por supuesto administración.

3.1.2.2. Ejemplo, empresa de cobranzas: la directora operativa de una empresa de cobranzas establece una función de productividad que relaciona el dinero recaudado (en dólares), por su equipo de trabajo desde el primero de diciembre hasta finales de enero. La directora basándose en datos históricos establece una función $f(t)$ que relaciona dichas variables:

$$f(t) = -10t^2 + 600t + 2000$$

donde t se mide en días.

De esta forma al evaluar la función se obtiene el dinero recaudado en el día seleccionado. La directora está interesada en establecer:

a) la razón media de cambio entre el día primero y el día 30.

b) La razón media de cambio entre el día 30 y el día 50.

c) Establezca una conclusión de cada resultado.

Solución:

a) El incremento correspondiente en el tiempo (días), el cual se identifica como la variable independiente es:

$$\Delta t = 30 - 1 = 29 \text{ días}$$

Para encontrar la variación en $y = f(t)$ se debe evaluar como se muestra a continuación:

$\Delta y = f(30) - f(1) = 11000 - 2590 = 8410$ cifra que estaría en USD

De esta manera la razón media de cambio en este periodo de tiempo sería:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{8410}{29} = 290\frac{USD}{\text{día}}$$

b) Al igual que antes, el incremento correspondiente en el tiempo, medido en días, es:

$$\Delta t = 50 - 30 = 20 \text{ días}$$

De igual forma, la variación en $y = f(t)$ se debe evaluar como se muestra a continuación:

$\Delta y = f(50) - f(30) = 7000 - 11000 = -4000$ cifra que estaría en USD

De esta manera la razón media de cambio en este periodo de tiempo es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{-4000}{20} = -200\frac{USD}{\text{día}}$$

c) Para generar una conclusión es conveniente presentar la figura 3.6

Se ha encontrado que a medida que t cambia en el primer rango de tiempo, entre el primer día y el día 30, el valor de la razón media de cambio es positivo y de valor $290\frac{USD}{\text{día}}$. Por lo tanto, se observa un aumento en el recaudo y se produce un resultado esperado por la directora operativa. Sin embargo, en el segundo rango de tiempo

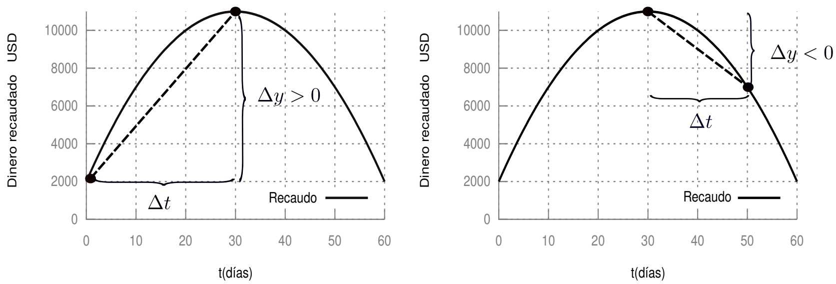


Figura 3.6. La gráfica de la izquierda muestra como al aumentar el tiempo aumenta el dinero recaudado entre el día 1 al día 30. En la gráfica de la derecha se observa como al aumentar el tiempo el recaudo disminuye, entre el día 30 y el día 50

se observa que al transcurrir t, del día 30 al día 50, hay una caída en el recaudo, por tal motivo se obtiene una razón media de cambio negativa, convirtiéndose en un resultado desafortunado para la directora, quien deberá evaluar las razones de dichos resultados no esperados.

3.1.2.3. Ejemplo, costo e ingreso: un modelo sencillo de costos puede ser construido con una función lineal en la cual el término independiente representa los gastos fijos y el coeficiente que acompaña la variable representa el costo por unidad de producción. Una fábrica produce correas para relojes suizos. El costo de producción fue modelado como:

$$C(q) = 10 + 2q$$

donde q es la cantidad de correas producidas por semana. Además, el fabricante modela los ingresos en las ventas con la siguiente función:

$$I(q) = 0.05q^2$$

Se define como ganancia (G) a la diferencia entre estas dos cantidades:

$$G(q) = I(q) - C(q) \tag{3.5}$$

Donde C, I y G se miden en USD. La fábrica produce 110 correas de lujo por semana, sin embargo, se planea aumentar la producción a 125 correas. Calcular la razón media de cambio de los costos, ingresos y ganancias.

Solución: en primer lugar, se obtiene el incremento $\Delta q = 125 - 110 = 15$. Se calcula la variación de costos e ingresos:

$$\begin{aligned} C(125) &= 10 + 2(125) = 260\,USD \\ C(115) &= 10 + 2(110) = 230\,USD \\ \Delta C = C(125) - C(110) &= 260 - 230 = 30\,USD \end{aligned}$$

Ahora es posible calcular la razón media de cambio para el costo:

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{30}{15} = 2\frac{USD}{correa}$$

Se procede de igual forma para los ingresos

$$\begin{aligned} I(125) &= 0.05(125)^2 = 781.3\,USD \\ I(110) &= 0.05(110)^2 = 605.0\,USD \\ \Delta I &= 781.3 - 605.0 = 176.3\,USD \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón de cambio sería:

$$\frac{\Delta I}{\Delta q} = \frac{I(q + \Delta q) - I(q)}{\Delta q} = \frac{176.3}{15} \approx 11.8\frac{USD}{correa}$$

Por último, en virtud de la definición dada de ganancia, se tiene que:

$$\begin{aligned} G(q) &= I(q) - C(q) \\ G(q) &= 0.005q^2 - (10 + 2q) \\ G(q) &= 0.05q^2 - 2q - 10 \end{aligned}$$

Evaluando se obtendría:

$$\begin{aligned} G(125) &= 521.3\,USD \\ G(110) &= 375.0\,USD \end{aligned}$$

De esta forma se tiene la razón de cambio es:

$$\frac{\Delta G}{\Delta q} = \frac{G(q + \Delta q) - G(q)}{\Delta q} = \frac{521.3 - 375.0}{15} \approx 9.8\frac{USD}{correa}$$

Ejercicios propuestos

1) En los siguientes ejercicios encuentre las razones medias de cambio entre los valores indicados:

   a) $f(x) = 5x + 2$ entre $x = 1$ y $x = 1.5$
   b) $f(x) = x^2$ entre $x = 3$ y $x = 3.7$
   c) $f(x) = 3x^3$ entre $x = 1.5$ y $x = 1.7$
   d) $f(x) = 2e^{-x}$ entre $x = 2.1$ y $x = 2.3$
   e) $f(q) = \frac{3q-2}{q-1}$ entre $q = 2$ y $q = 2.3$

2) Una fábrica empasta libros de literatura colombiana en versiones de lujo. El costo de producción del número de libros manufacturados se modela de la siguiente forma:

$$C(x) = 30000 + 20x$$

   Además se espera una función de ingreso $I(x) = 0.1\sqrt{x^3}$.
   Se desea aumentar la producción de $x = 200$ libros por semana hasta $x = 230$ libros por semana.

   a) Encontrar la razón de cambio para la función de costo, de ingreso y de ganancia en el intervalo mencionado. ¿Qué signos se obtienen de estas razones de cambio? ¿Qué significado tienen estos resultados?
   b) Realice una gráfica de costos e ingreso en el mismo plano. ¿Se cruzan estas gráficas? ¿Qué puede representar este punto?

3) A continuación se presentan gráficos de la tendencia de consumos de tetraciclinas en promedio de dosis por día indicada para un adulto (DDD) por 1000 habitantes por día (WHO - collaborating Centre for Drug Statistics Methodology, 2020) (DDD/1000/día) en varios países europeos. (Datos tomados de (European Centre for Disease Prevention and Control, 2020)). Utilizando la información en la figura 3.7, calcular:

   a) La razón de cambio de entre 2014 y 2018 del consumo de tetraciclinas para Austria y Bélgica ¿Cuál tuvo mayor cambio? ¿Qué representan los signos obtenidos en los resultados?
   b) La razón de cambio de entre 2016 y 2020 del consumo de tetraciclinas para Croacia y Bulgaria ¿Cuál tuvo mayor cambio? ¿Qué representan los signos obtenidos en los resultados?

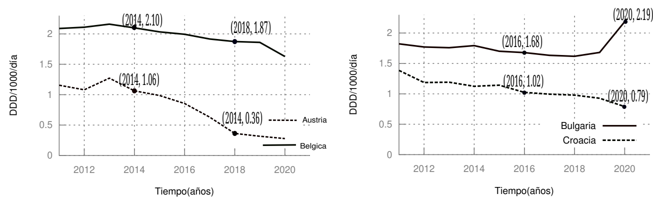


Figura 3.7. Consumo de tetraciclinas en algunos países europeos desde 2011 hasta 2020. Fuente (European Centre for Disease Prevention and Control, 2020)

4) Un economista modela los precios para cierto insumo que requiere una empresa de fundición con la siguiente función $P(t) = e^{0.1t}$, donde t se mide en meses (figura 3.8).

   Encontrar la razón de cambio entre los siguientes intervalos:

   a) Entre el mes 1 y el mes 2

   b) Entre el mes 2 y el mes 3

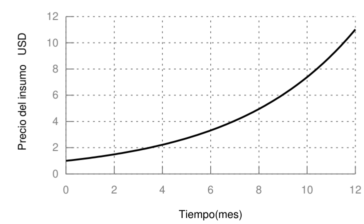


Figura 3.8. Precio de insumo en USD en los meses del año

5) Es posible utilizar una hoja de cálculo para encontrar de forma automática secantes a una función. En este caso se usará la función $f(x) = x^2$.

   a) Genere una tabla con los datos de la primera columna de la tabla 1 y con una fórmula genere los datos de la segunda columna.

   b) Realice una fórmula en una columna en su hoja de cálculo, en el cual se encuentre de forma automática la pendiente de puntos consecutivos (figura 3.9).

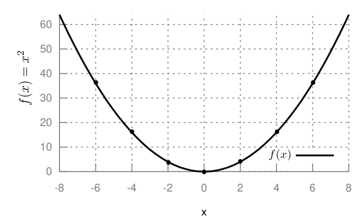


Figura 3.9. Gráfica de datos de la tabla. Se busca calcular de forma automática las pendientes de rectas que unen los puntos marcados en la figura

x	f(x)
-6	36
-4	16
-2	4
0	0
2	4
4	16
6	36

Tabla 3.1. Datos asociados a la función $f(x) = x^2$

3.2. Derivada

Como se discutió en el capítulo anterior las variaciones de funciones son de gran importancia en múltiples disciplinas. De esta forma un incremento Δx produce una variación Δy. Sin embargo, no se mencionó el tamaño apropiado de la variación. Por ejemplo, es conocido que el precio del oro suele ser una de las inversiones en que se suele confiar en épocas de inminente recesión. Por tanto, es posible que las variaciones del precio del metal en periodos cortos de tiempo representen un gran interés en inversores, en épocas de temor económico, dado que mostrará de mejor forma la dinámica evolutiva

del preciado metal.
En general, conocer las variaciones infinitesimales, es decir, variaciones muy pequeñas, de una función, es de gran interés de estudio en administración, economía, ingeniería y ciencias[1].

3.2.0.1. Definición, derivada de la función f en el punto a:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{3.6}$$

Es importante destacar que al asegurar que la derivada $f'(a)$ existe, implica que el límite anteriormente descrito también existe. Por lo tanto, su condición de derivabilidad está supeditada a la existencia de dicho límite.

3.2.0.2. Definición, condición de derivabilidad de una función f en $x = a$:

$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x^+ \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{3.7}$$

La anterior definición implica que las derivadas unilaterales deben ser iguales para que la derivada esté definida en ese punto, es decir, $f'(a)$ existe *sí y solo si* las derivadas por derecha y por izquierda son iguales.

3.2.0.3. Ejemplo, derivada en función a trozos: suponga la siguiente función a trozos (figura 3.10a):

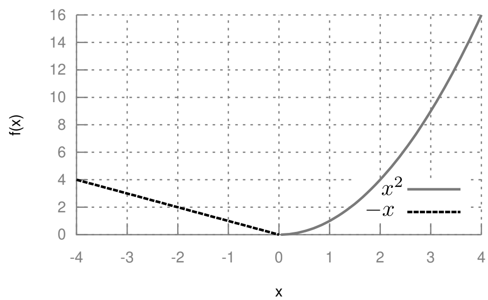
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -x & si & x < 0 \\ \\ x^2 & si & x \geq 0 \end{array} \right\} \tag{3.8}$$

Verifique si la función es derivable en los siguientes puntos.

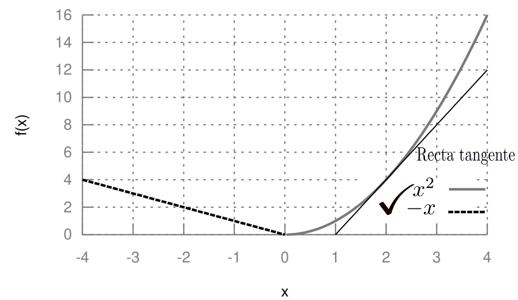
a) $a = 2$

b) $a = 0$

[1] El cálculo diferencial surgió como herramienta para calcular la velocidad instantánea de un móvil en el enfoque de Sir Isaac Newton y también Leibniz al estudiar la razón entre diferencias infinitesimales (Edwards, 2012).



(a) Gráfica de la función a trozos $f(x)$



(b) Función $f(x)$ y la recta tangente en $a = 2$

Figura 3.10. Gráfica de la función f(x) y la derivada en $a = 2$. Dado que las derivadas unilaterales son iguales la derivada sí existe!. Se dibuja además la recta tangente, la cual está relacionada con la derivada como se mostrará en la sección

Sí existe, encuentre su valor.

Solución:

a) Se deben calcular las derivadas unilaterales alrededor de $a = 2$

$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - f(2)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{(2^2 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x}$$

Hacemos la resta $2^2 - 4 = 0$ y factorizamos Δx

$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{((4+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}$$

Hacemos la división $\Delta x/\Delta x = 1$

$$\lim_{\Delta x^- \to 0} 4 + \Delta x$$

por lo tanto

$$= 4$$

b) Evaluamos la derivada por izquierda:

$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^- \to 0} \frac{(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^+ \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Ahora evaluamos por derecha:

$$\lim_{\Delta x^+ \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^+ \to 0} \frac{(0+\Delta x)^2 - f(0)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x^+ \to 0} \Delta x = 0$$

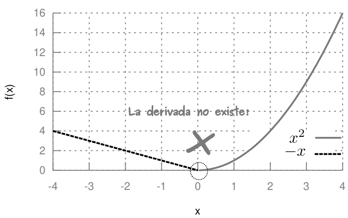


Figura 3.11. Dado que las derivadas unilaterales no son iguales la derivada en $a = 0$ no existe

Se puede concluir entonces que para que la derivada de una función exista es necesario que los valores de las derivadas unilaterales sean iguales. En particular se obtiene que la derivada en $x = 2$ existe dado que las derivadas unilaterales coinciden (figura 3.10b). Por otro lado, las derivadas unilaterales en $x = 0$ no coinciden, por tanto la derivada no existe (figura 3.11).

3.3. Derivada como una función

En la sección anterior se analizó la derivada en un punto, sin embargo, esto puede generalizarse de tal forma que se evalúa la derivada en cualquier valor x que pertenece al dominio de la función. Esto nos lleva a definir la derivada como una función de la siguiente forma:

3.3.0.1. Definición, derivada de la función f respecto a x:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.9}$$

Al comparar la anterior definición con lo visto en la sección

3.1.2 se observa que la derivada puede ser considerada como una tasa de cambio o variación instantánea de la función con respecto a la variable. Es importante resaltar que la anterior notación para la derivada también se suele escribir de la siguiente forma:

$$\frac{df}{dx} = D_x[f(x)] = f'(x) \tag{3.10}$$

En las siguientes secciones se desarrollará la anterior definición en ejemplos concretos.
Antes de ello se va a exponer la interpretación gráfica de una derivada.

3.3.1. Interpretación geométrica de la derivada

Suponga dos puntos P y Q sobre la función $f(x)$ tal cual como muestra en la figura 3.12. Si se unen a través de una línea recta se forma una recta secante (figura 3.12a). Al analizar la secuencia mientras $\Delta x \to 0$ se observa como los puntos tienden a unirse, hasta que la secante tiende a una tangente, es decir, una recta que roza en un punto a la función $f(x)$.

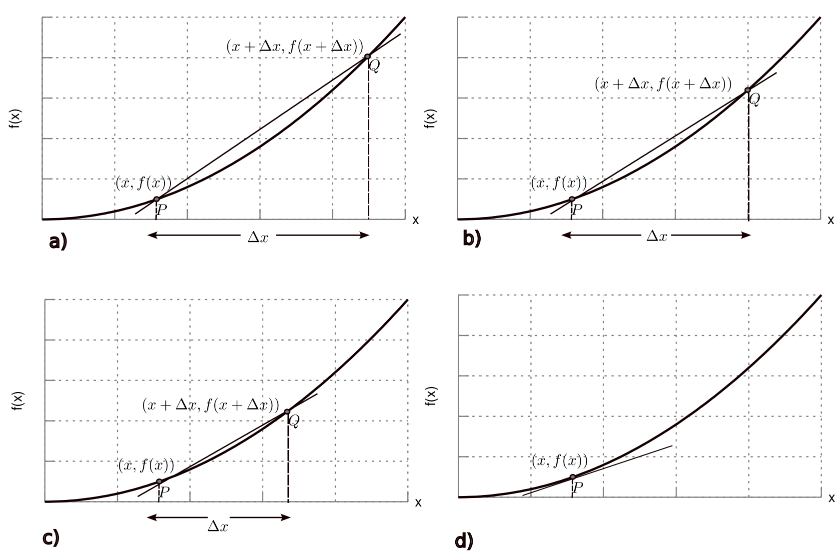


Figura 3.12. La secante cambia mientras Δx tiende a cero, transformando la secante en una tangente

3.3.2. Derivada de una función constante

En virtud de lo anterior, ¿cuál sería la derivada de una función constante?
Recuérdese que una función constante $f(x) = c$ es una función que no cambia y dado que la derivada mide la variación de una función concluimos que la derivada de una constante es cero.

3.3.2.1. Definición, derivada de una constante: si $f(x) = c$ representa una función constante entonces su derivada es cero.

$$\frac{df}{dx} = 0 \tag{3.11}$$

3.3.3. Derivada de una función lineal

Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$. El cambio de la función está definido por la pendiente de la función misma. A continuación se calcula la derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) + b - (mx + b)}{\Delta x} \tag{3.12}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} \tag{3.13}$$

$$\frac{df}{dx} = m \tag{3.14}$$

Es decir la derivada es la pendiente de la recta, como ya se había anticipado (figura 3.13). Un caso particular de la función lineal es la función $f(x) = x$. Siguiendo los mismos pasos se invita al lector a probar que:

$$\frac{df}{dx} = 1 \tag{3.15}$$

3.3.4. Derivada de una función cuadrática

Esta vez, por claridad se utilizará un ejemplo particular para calcular la derivada de una función cuadrática. Como pronto será visto, esto establece un paso importante para la siguiente sección.

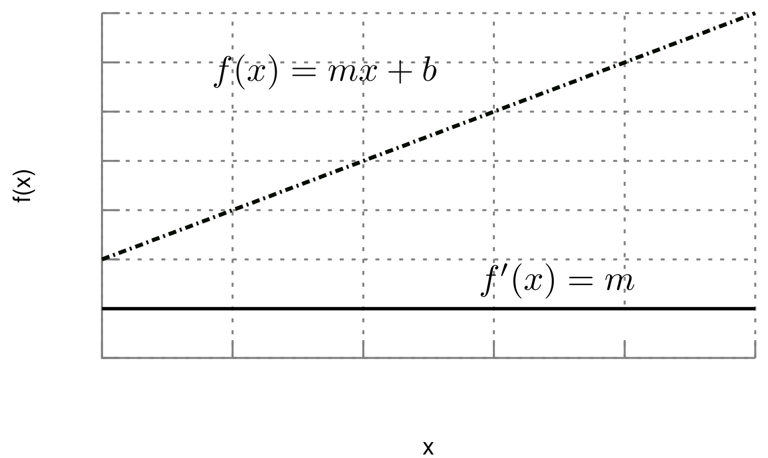


Figura 3.13. Gráfica de la función lineal $f(x)$ y su derivada $f'(x)$

3.3.4.1. Ejemplo, derivada de x^2: suponga la función $f(x) = x^2$. Encontrar:

a) La derivada de la función $f(x)$.

b) La tasa de variación instantánea cuando $x = 6$.

c) La tasa de variación instantánea cuando $x = 3.5$.

Solución:

a)

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + b - x^2}{\Delta x} \tag{3.16}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \tag{3.17}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} \tag{3.18}$$

Simplificando y tomando el límite se obtiene

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = 2x \tag{3.19}$$

b) Para encontrar la tasa instantánea en algún valor particular basta con evaluar la derivada en el valor requerido $x = 6$

$$f'(6) = 2(6) = 12 \tag{3.20}$$

c) Al igual que en el caso anterior se evalúa en $x = 3.5$

$$f'(x) = 2(3.5) = 7 \tag{3.21}$$

3.3.4.2. Ejemplo, recta tangente: utilizando la información del ejemplo anterior encuentre la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = 6$ y $x = 3.5$ y grafique las tangentes.
Solución: como ya se discutió en la presente sección, la derivada representa la pendiente de una recta tangente. Por tanto, cuando se evaluó la derivada en $x = 6$, la pendiente de la recta tangente en la coordenada $(6, f(6)$ fue encontrada. Para determinar $f(6)$ se evalúa la función obteniendo:

$$f(6) = (6)^2 = 36 \tag{3.22}$$

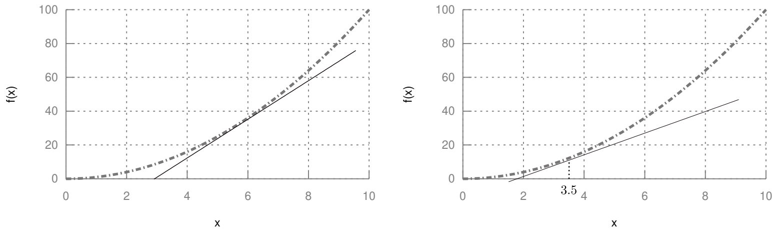
Por lo tanto, se necesita encontrar la ecuación de la recta dado el punto (6,36) y la pendiente $f'(6) = 12$ (la cual fue hallada en el ejercicio anterior).
Se sabe que la ecuación de la recta es $y(x) = mx + b$ utilizando la información conocida: $36 = 12(6)+b$. Despejando b se obtiene: $b = -36$
De esta forma la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = 6$ sería

$$y = 12x - 36$$

Procediendo de la misma forma se puede encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x = 3.5$. Se encuentra que la ecuación de dicha recta tangente es:

$$y = 7x - 12.25$$

Las gráficas de las funciones con las rectas tangentes se observan en las figuras 3.14a y 3.14b.



(a) Función $f(x)$ y la recta tangente en $x = 6$.

(b) Función $f(x)$ y la recta tangente en $x = 3.5$.

Figura 3.14. Función $f(x) = x^2$ con las rectas tangentes

3.4. Regla para calcular la derivada de una potencia

Se observó en la sección pasada que para calcular la derivada de una función era necesario calcular el límite asociado a la tasa de cambio instantánea. Se encontró para la función constante $f(x) = c$ su derivada era $f'(x) = 0$. De igual forma se mostró que si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$. Finalmente también se probó que si $f(x) = x^2$, su derivada es $f'(x) = 2x$. Sería válido preguntarse cuánto sería la derivada de una función cúbica $f(x) = x^3$. Se procede a partir de la definición de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + b - x^3}{\Delta x} \tag{3.23}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x(\Delta x)^2 + 3x^2(\Delta x) + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \tag{3.24}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x}{\Delta x} \tag{3.25}$$

Tomando el límite se obtiene

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 \tag{3.26}$$

En la tabla 3.2 se organizan los anteriores resultados y se puede ver un patrón reconocible: En general se obtiene que si se tiene una función $f(x) = x^r$ entonces su derivada es:

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{3.27}$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$

Tabla 3.2. Tabla de derivadas. Se observa el patrón de una función potencia de x

También es posible demostrar que:

3.4.0.1. Definición, derivada de $f(x) = ax^r$:

$$f'(x) = arx^{r-1} \tag{3.28}$$

Donde r es cualquier número real $\mathbb{R}$ (es decir, puede ser entero, pero también decimal o fraccionario).

3.4.0.2. Ejemplo, regla de la potencia: calcular la derivada de la función $g(x) = 7x^{11}$. *Solución:* se observa que la potencia es 11, por lo tanto debe "bajar" a multiplicar el coeficiente 7 y se disminuye la potencia en una unidad:

$$g'(x) = 7(11)x^{11-1}$$
$$g'(x) = 77x^{10}$$

3.4.0.3. Ejemplo, ingresos: suponga que la función de ingresos dependiente del tiempo de una compañía se modela con la función:

$$I(t) = -0.25t^2 + 1.5t - 0.25$$

donde t se mide en años e I(t) en unidades monetarias. Analice la variación de esta función en el tiempo ¿Cuándo aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿Cómo está relacionado esto con la derivada? *Solución:* Utilizando lo tratado en las secciones anteriores se puede llegar con sencillez a su derivada:

$$I'(t) = -0.5t + 1.5$$

Las gráficas de las funciones I(t) y de I'(t) se encuentran disponibles en la figura 3.15a. Se observa que cuando la gráfica I(t) aumenta, la derivada I'(t) tiene un valor positivo (línea -.-). Después, la gráfica I(t) comienza a descender (línea punteada). Al observar la derivada I'(t) en ese mismo intervalo de tiempo (también línea punteada), se observa que la gráfica toma valores negativos. Lo cual implica una evidente relación entre el signo de la derivada I'(t) y el comportamiento de la función I(t). Adicionalmente, también es notorio el hecho de que cuando la gráfica llega al punto máximo la derivada es cero. Esto será aprovechado en futuros capítulos cuando se hable de optimización. Finalmente, se relaciona en la figura 3.15b una secuencia de figuras en las cuales el lector puede observar cuál es el comportamiento de varias rectas tangentes y de sus pendientes a medida que pasa el tiempo en la figura (se han dibujado dos rectas tangentes por esquema). En las dos primeras figuras de la figura 3.15b se observa que las pendientes de las tangentes son positivas y en las últimas gráficas se observa que las pendientes de las tangentes son negativas. Se identifica entonces la relación del comportamiento de la pendiente de la recta tangente con el comportamiento de la derivada de la función (figura 3.15a inferior).

3.4.1. Derivadas de sumas, restas de funciones y de funciones multiplicadas por una constante

Es común tener expresiones que tengan varias funciones sumándose o restándose. La derivada es un operador lineal, es decir:

3.4.1.1. Definición, regla para encontrar la derivada de una suma o resta de funciones:

$$\frac{d}{dx}(G(x) \pm H(x)) = \frac{d}{dx}G(x) \pm \frac{d}{dx}H(x) \tag{3.29}$$

Se observa que la derivada se "distribuye" a cada función.

Otro resultado importante y complementario.

3.4.1.2. Definición, regla para encontrar la derivada de una función multiplicada por una constante:

$$\frac{d}{dx}(cH(x)) = c\frac{d}{dx}(H(x)) \tag{3.30}$$

3.4.1.3. Ejemplo, capital: la función de incremento de cierto capital se puede escribir de la siguiente forma: $f(x) = 4g(x)$, donde $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Encontrar la derivada de la función $f(x)$.

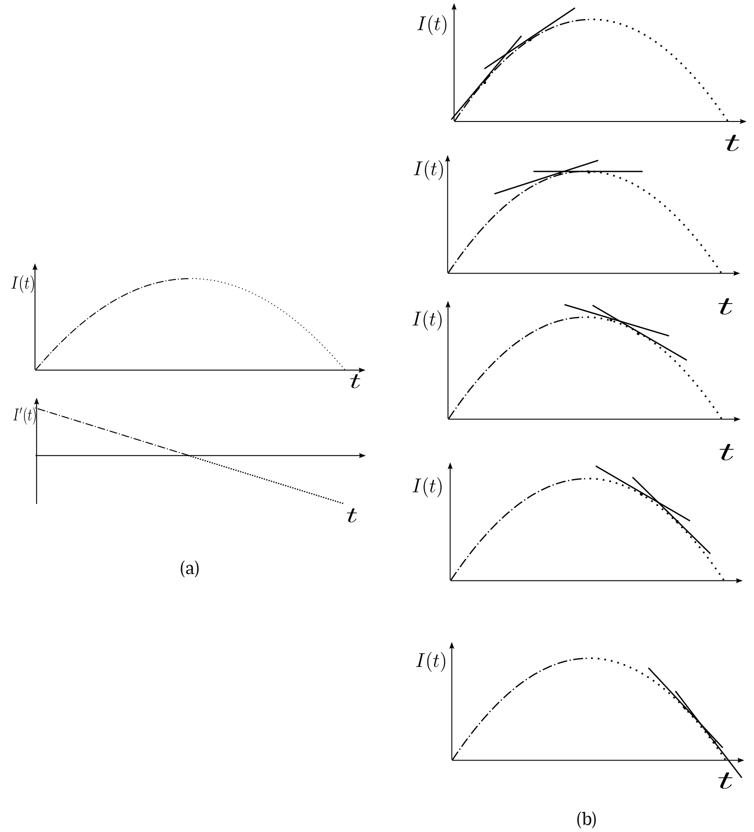


Figura 3.15. a) En la gráfica superior se observa la función I(t). La gráfica está en diferentes secciones. En la primera parte la función crece hasta el punto máximo en $t = 3$. La segunda parte, en línea punteada, se encuentra la sección de la función que va disminuyendo. En el esquema inferior se encuentra graficada la función derivada. Aunque la función derivada siempre decrece, la parte positiva (-.-) está en concordancia con el crecimiento de la función I(t).
b) En la secuencia se observa como es el comportamiento de la recta tangente, en particular de su pendiente. Se muestra que la pendiente empieza siendo positiva pero tiende a cero y finalmente se hace negativa

Solución: en virtud de la ecuación Ec. 3.4.1.2, se tiene que $f'(x) = 4g'(x)$, por lo tanto:

$$f'(x) = 4(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})$$
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

3.4.1.4. Ejemplo, precio: el precio de una acción en el mercado se modeló con la siguiente función $P(t) = 0.01\sqrt{t^3}+2$, donde t representa el tiempo en meses.
Calcular:

a) La derivada de P(t) respecto al tiempo

b) La razón instantánea calculada en el mes 2.

c) Calcular la ecuación de la recta tangente en $t = 2$ meses.

Solución: Se observa que la función $P(t)$ está hecha de la suma de dos funciones $g(t) = 0.01\sqrt{t^3}$ y $f(t) = 2$, donde esta última es una función constante.

a) Reescribiendo la función en forma exponencial:

$$P(t) = 0.01t^{\frac{3}{2}} + 2$$

Al derivar se tendría

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}(0.01t^{\frac{3}{2}}) + \frac{d}{dt}(2)$$

Sin embargo, la derivada de una constante es cero. Se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(0.01t^{\frac{3}{2}})$$
$$\frac{dP(t)}{dt} = 0.01(\frac{3}{2})t^{\frac{3}{2}-1}$$
$$\frac{dP(t)}{dt} = 0.015t^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dP(t)}{dt} = 0.015\sqrt{t}$$

También se puede escribir

$$P'(t) = 0.015\sqrt{t}$$

b) Para hallar la razón de cambio en $t = 2$ se debe evaluar la derivada $P'(2)$:

$$P'(2) = 0.015\sqrt{2} \approx 0.02$$

c) Para encontrar la recta tangente se debe hallar (2,P(2)).

$$P(2) = 0.01(2^{\frac{3}{2}}) + 2 = 2.03$$

Por lo tanto, se tiene que hallar la recta tangente conociendo el punto (2,2.03) y la pendiente $P'(2) = 0.02$. Recordando la ecuación de una recta $y = mx + b$ se tiene que:

$$\begin{aligned} 2.03 &= 0.02(2) + b \\ b &= 1.99 \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 0.02x + 1.99$$

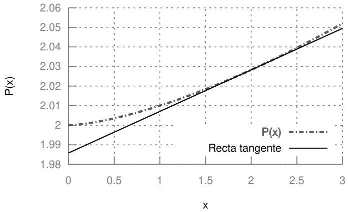


Figura 3.16. Función P(x) y su recta tangente en t=2

3.5. Derivadas de productos y cocientes

Aplicando la definición de derivada dada al principio de esta sección es posible encontrar algunas reglas para realizar derivadas de funciones que se estén multiplicando o dividiendo.
Se resumen dichas reglas a continuación:

3.5.0.1. Definición, regla para encontrar la derivada del producto de dos funciones:

$$\frac{d}{dx}(G(x) \cdot H(x)) = G(x)\frac{d}{dx}(H(x)) + \frac{d}{dx}(G(x)) \cdot H(x) \tag{3.31}$$

3.5.0.2. Definición, regla para encontrar la derivada de un cociente de funciones. :

$$\frac{d}{dx}(\frac{G(x)}{H(x)}) = \frac{\frac{d}{dx}(G(x)) \cdot H(x) - G(x)\frac{d}{dx}(H(x))}{(H(x))^2} \tag{3.32}$$

Para $H(x) \neq 0$

3.5.0.3. Ejemplo, reglas de derivación: encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a)

$$f(x) = (3x^2 + 4)(x^3 + x)$$

b)

$$g(x) = \frac{x^4 + 2}{x + 1}$$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} f'(x) = (3x^2+4)\frac{d}{dx}[(x^3+x)] + \frac{d}{dx}[(3x^2+4)](x^3+x) \\ f'(x) = (3x^2+4)(3x^2+1) + (6x)(x^3+x) \\ \text{reduciendo se obtiene} \\ f'(x) = 15x^4 + 21x^2 + 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[(x^4+2)](x+1) - (x^4+2)\frac{d}{dx}[(x+1)]}{(x+1)^2} \\ g'(x) = \frac{(4x^3)(x+1) - (x^4+2)}{(x+1)^2} \\ \text{reduciendo se obtiene} \\ g'(x) = \frac{-2 + 4x^3 + 3x^4}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

3.6. Regla de la cadena

Esta sección está enfocada en la derivación de funciones compuestas, por ejemplo suponga que debe derivar la función $y(x) = (x^4 + 5)^2$. El lector puede darse cuenta de que es posible identificar $y(u) = u^2$ y $u(x) = x^4 + 5$, es decir, como una función compuesta, donde la primera sería la función externa y la segunda la función interna.
Es claro que la derivada NO es $2(x^4 + 5)$.

Si expandimos la expresión se obtendría: $y(x) = x^8 + 10x^4 + 25$ y al derivarla con las reglas ya conocidas se obtiene:

$$y'(x) = 8x^7 + 40x^3$$

Factorizando la anterior expresión se puede escribir:

$$y'(x) = 2(x^4 + 5)(4x^3)$$

Si se observa con atención la anterior solución se advierte que el resultado se podría escribir como la derivada externa multiplicada por la derivada interna. En general el anterior resultado se puede escribir de la siguiente manera:

3.6.0.1. Definición, regla de la cadena: si $y = f(u)$ y además $u = h(x)$ entonces::

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{3.33}$$

3.6.0.2. Ejemplo, regla de la cadena: encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a)

$$y = (x^2 + 1)^5$$

b)

$$y = \sqrt{x^3 + x^2}$$

Solución:

a) Identificamos la composición de funciones de tal forma que:
$y = f(u) = u^5$ además $u(x) = x^2 + 1$.
Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = (5u^4)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^2 + 1)(2x)$$

b) Se observa que: $y = f(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ además $u(x) = x^3 + x^2$.
Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}(3x^2 + 2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}}(3x^2 + 2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2}}(3x^2 + 2x)$$

3.7. Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

Las funciones exponenciales y logarítmicas son de gran utilidad en aplicaciones administrativas y económicas. Por ejemplo observe la figura 3.17. Allí se registra el importante índice bursátil S&P 500, cuyos valores se pueden modelar utilizando una ecuación exponencial $y(t) = 66.97e^{0.0065t}$. Este modelo y su variación, es decir, su derivada, pueden representar una cantidad importante en el análisis del comportamiento de este importante índice. De forma similar es posible modelar diferentes cantidades de relevancia para economistas y administradores. Por lo tanto, el estudio de la variación de funciones exponenciales y logarítmicas resultan de particular interés.
En la presente sección se estudiarán las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas y se realizarán varios ejemplos y aplicaciones.

3.7.1. Derivación de la función exponencial

Como ya se ha comentado la función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$. Aplicando la definición de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$
$$\frac{df}{dx} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

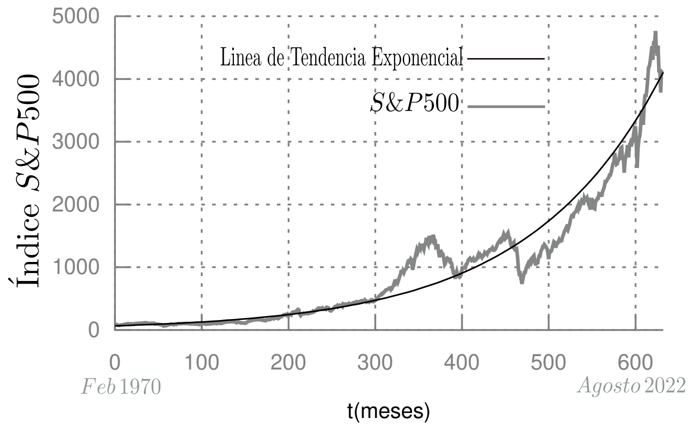


Figura 3.17. Valor del índice S&P 500 desde febrero 1970 hasta agosto 2022. Se observa un aumento que puede modelarse con una función exponencial. Fuente: (Investing.com, 2022b)

Δx	$g(\Delta x) = \frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
-0,0003	0,69308
-0,0002	0,6931
-0,0001	0,69312
0,0001	0,69317
0,0002	0,6932
0,0003	0,69322
0,0004	0,6932

Tabla 3.3. Valores de la función $g(\Delta x)$.
Se observa que cuando Δx tiende
a cero la función $g(x)$ tiende a $\ln 2 = 0.6931$

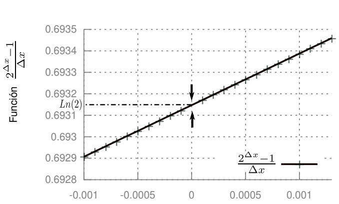


Figura 3.18. Gráfica de los valores encontrados en la tabla 3.3. Se observa que, en efecto, el límite existe y que tiende al valor $\ln 2 = 0.6931$

Para continuar el análisis se define:

$$g(\Delta x) = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Por ejemplo, por motivos de claridad, si se asigna $a = 2$ es posible estudiar el comportamiento del límite para este caso particular:

Por tanto sí $f(x) = 2^x$ entonces:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{x+\Delta x} - 2^x}{\Delta x}$$

factorizando 2^x se obtiene

$$\frac{df}{dx} = 2^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

El límite especial $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ esta analizado en la figura 3.18 y en la tabla 3.3, donde se obtuvo el resultado $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln(2)$.

$$\frac{df}{dx} = 2^x \ln(2)$$

Si se hace el cambio $f(x) = 3^x$ y se realiza el mismo análisis se llega a:

$$\frac{df}{dx} = 3^x \ln(3)$$

Por lo tanto se puede escribir:

3.7.1.1. Definición, derivada de una función exponencial: si $f(x) = a^x$ entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = a^x \ln(a) \tag{3.34}$$

En general y a través de la regla de la cadena se puede escribir:

3.7.1.2. Definición, derivada de una función exponencial compuesta: si $f(x) = a^u$ y $u = h(x)$ entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = a^u \ln(a)\frac{du}{dx} \tag{3.35}$$

3.7.1.3. Ejemplo, problema: en su tesis de posgrado un economista asegura que el poder de adquisición en el tiempo, en periodo de recesión, lo puede representar de la siguiente forma:

$$g(t) = 0.15^{-0.01t}.$$

Donde t está medido en años. Calcular:

a) La derivada de la función

b) La razón de cambio en $t = 3$ años

c) Calcule la ecuación de la recta tangente en $t = 3$ años

Solución:

a) Utilizando la derivada de una función exponencial:

$$g'(t) = (0.15)^{-0.01t}(\ln(0.15))\frac{d}{dt}(-0.01t)$$
$$g'(t) = (0.15)^{-0.01t}(\ln(0.15))(-0.01)$$
$$g'(t) = -0.019(0.15)^{-0.01t}$$

b) La razón de cambio se encuentra evaluando la derivada en t=3 años:

$$g'(3) = -0.019(0.15)^{-0.01(3)}$$
$$g'(3) = -0.02$$

c) Para encontrar la recta tangente requerimos la coordenada $(3, g(3))$:

$$g(3) = 0.15^{-0.01(3)} = 1.06$$

De esta forma ya es posible calcular la ecuación de la recta tangente, conocido un punto y la pendiente:

$$y = mx + b$$
$$1.06 = -0.02(3) + b$$
$$b = 1.12$$

por lo tanto, la ecuación de la recta queda:

$$y = -0.02x + 1.12$$

3.7.2. Derivación de la función exponencial natural

Un caso particular de la función exponencial es cuando la base es igual a $e \approx 2.718281..$, dado que $\ln e = 1$. Los resultados encontrados en la sección anterior se pueden escribir:

3.7.2.1. Definición, derivada de una función exponencial natural: si $f(x) = e^x$ entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = e^x \tag{3.36}$$

En general y a través de la regla de la cadena se puede escribir:

3.7.2.2. Definición, derivada de una función exponencial: si $f(x) = e^u$ y $u = h(x)$ entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = e^u \frac{du}{dx} \tag{3.37}$$

3.7.2.3. Ejemplo, población: encuentre la derivada de la siguiente función que representa la población de cierta región de un país.

$$f(t) = 12e^{0.001t^2}$$

Solución: en este caso la función interna es $0.001t^2$. Por lo tanto la derivada sería:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(t) &= 12e^{0.001t^2}\frac{d}{dt}(0.001t^2) \\
\frac{d}{dt}f(t) &= 12e^{0.001t^2}(0.002t) \\
\frac{d}{dt}f(t) &= 0.024te^{0.001t^2}
\end{aligned}$$

3.7.3. Derivación de la función logaritmo

La función logaritmo es la función inversa de la función exponencial. Es posible demostrar que la derivada de dicha función es:

3.7.3.1. Definición, derivada de una función logarítmica y logarítmica natural:

a) Sí $f(x) = \log_a x$ entonces

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \tag{3.38}$$

b) Sí $f(x) = \ln x$ entonces

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{3.39}$$

3.7.3.2. Definición, derivada de una función logarítmica y logarítmica natural compuesta:

a) Sí $f(u) = \log_a u$ entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{u \cdot \ln a} \frac{du}{dx} \tag{3.40}$$

b) Sí $f(u) = \ln u$ entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \tag{3.41}$$

3.7.3.3. Ejemplo, funciones trascendentes: encontrar la derivada de las siguientes funciones

a)

$$f(x) = 5 \ln(x)$$

b)

$$g(x) = 10 \ln(x^3)$$

Solución:

a)

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} \tag{3.42}$$

b)

$$\frac{d}{dx}g(x) = 10 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}(x^3) \tag{3.43}$$
$$\frac{d}{dx}g(x) = 10 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) \tag{3.44}$$
$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{30}{x} \tag{3.45}$$

3.7.4. Derivada de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones que cambian notoriamente, por tanto, el cálculo de sus derivadas representa un importante tema a tratar. A continuación se resumen los principales resultados relacionados:

3.7.4.1. Definición, derivadas de funciones trigonométricas:

a) Sí $f(x) = \text{sen}(x)$ entonces

$$f'(x) = \cos(x) \tag{3.46}$$

b) Sí $f(x) = \cos(x)$ entonces

$$f'(x) = -\text{sen}(x) \tag{3.47}$$

c) Sí $f(x) = \tan(x)$ entonces

$$f'(x) = \sec^2(x) \tag{3.48}$$

3.7.4.2. Ejemplo, funciones trigonométricas: las ventas de ropa de invierno pueden modelarse en cierto almacén utilizando funciones trigonométricas, dado que dichas ventas representan un comportamiento cíclico.

Suponga que la función que representa las ventas se puede modelar de la siguiente manera:

$$f(t) = 20\,\mathrm{sen}(t) - 12\cos(t) + 25$$

Donde t está medido en meses. Encontrar la variación instantánea de la función $f(t)$ en $t = 2$ meses.

Solución: Se debe derivar la función:

$$f'(t) = 20\cos(t) + 12\,\mathrm{sen}(t)$$

Evaluando la función

$$f'(2) = 20\cos(2) + 12\,\mathrm{sen}(2)$$
$$f'(2) = 2.59$$

Ejercicios propuestos

1. Grafique las siguientes funciones. Utilizando la definición de límite encuentre su derivada y realice su gráfica en el mismo plano.

   a)
   $$f(x) = -20x^2 + 80x \tag{3.49}$$

   b)
   $$f(x) = -20x^2 - 80x \tag{3.50}$$

   c)
   $$f(x) = 2x^3 \tag{3.51}$$

2. Utilizando datos históricos del índice bursátil S&P 500 es posible encontrar la gráfica que se presenta en la figura 3.17. Haciendo una regresión se puede obtener la siguiente función $y(t) = 66.97e^{0.0065t}$ donde t se mide en años.

   a) Encuentre la derivada de la función.

   b) Realice una gráfica de las función $y(t)$ y la función $y'(t)$ en el mismo plano.

3. Un modelo sencillo de costos puede ser construido con una función lineal en la cual el término independiente representa los gastos fijos y el coeficiente que acompaña la variable representa

el costo por unidad de producción. Una fábrica produce correas para relojes suizos. El costo de producción fue modelado como:

$$C(q) = 10 + 2q \tag{3.52}$$

donde q es la cantidad de correas producidas por semana. Además, el fabricante modela los ingresos en las ventas con la siguiente función:

$$I(q) = 0.05q^2$$

Se define como ganancia (G) a la diferencia entre estas dos cantidades:

$$G(q) = I(q) - C(q)$$

a) Encuentre la derivada de la función de ganancia respecto a q.

b) Encuentre la pendiente de la recta tangente en $q = 115$.

c) Realice la gráfica de la función y de su derivada en el mismo plano ¿qué valor tiene la derivada en $q = 20$?

4. Un economista modela la valorización del precio de una acción como $P(t) = 0.3te^{0.001t}$, donde t se mide en años.

   a) Encontrar la derivada de la función.

   b) Encontrar la razón de cambio en $t = 3$ años.

   c) Encuentre la ecuación de la recta tangente en $t = 3$ años.

5. Encuentre la derivada de las siguientes funciones logarítmicas:

   a)
   $$f(x) = (4x + 2)\ln(x^2) \tag{3.53}$$

   b)
   $$g(x) = e^{x^2}\ln(x^3) \tag{3.54}$$

   c)
   $$h(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) \tag{3.55}$$

6. La función de ingreso de q artículos es $I(q) = -0.05q^2 + 17q$ el cual se encuentra medido en euros. El costo marginal se define como la variación $I'(q)$.

a) Encontrar el ingreso marginal.

b) Evaluar el ingreso marginal en $q = 4$ artículos.

7. **Utilizando hoja de cálculo**
Es posible realizar la derivada numéricamente utilizando una hoja de cálculo. Sea $f(x) = x^2$. En la primera columna se registran valores de x desde 0.1 hasta 1. En la segunda la función evaluada en los valores de la primera columna. En la tercera columna se debe calcular el valor de las pendientes de los puntos consecutivos propuestos. Nótese que $x_2 - x_1 = 0.1$ para los valores propuestos en la tabla.

x	$f(x)$	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
0.1	0.01	
0.2	0.04	
0.3	0.09	
.		
.		
1	1	

Tabla 3.4. Complete la tabla siguiendo la secuencia propuesta

a) Grafique $f(x)$ y la pendiente como función de x en el mismo plano ¿Qué funciones se obtienen?

b) Realice el mismo procedimiento pero esta vez $x_2 - x_1 = 0.01$ Realizar las mismas gráficas solicitadas en el inciso anterior.

c) Realice el mismo procedimiento pero esta vez $x_2 - x_1 = 0.001$ Realizar las mismas gráficas solicitadas en el inciso anterior.

Capítulo 4

Aplicaciones de las derivadas

Gabriel Villalobos Camargo

El Cálculo fue el primer logro de las matemáticas modernas, y es muy difícil sobrestimar su importancia. Yo pienso que define de manera más unívoca que cualquier otra cosa el comienzo de la matemática moderna; y el sistema del análisis matemático, que es su desarrollo lógico, constituye el avance más grande en el pensamiento exacto.

Jhon Von Neumann

Y sin embargo, desde otro punto de vista, el cálculo es fundamentalmente ingenuo, casi que infantil en su optimismo. La experiencia nos enseña que el cambio puede ser imprevisto, discontinuo y desgarrador. El cálculo obtiene su poder rehusándose a ver eso. Insiste en un mundo sin accidentes, donde una cosa lleva lógicamente a la siguiente. Dame las condiciones iniciales y la ley de movimiento y con el cálculo yo puedo prever el futuro –o aun mejor–, reconstruir el pasado. Quisiera poder hacer eso ahora mismo.

Steven Strogatz

Situación problema

El cálculo permite resolver la pregunta: ¿cuál es “la mejor” forma de hacer este proceso? Cuando estamos hablando de diferentes tipos de proceso. Lo hace mediante la optimización. En economía la optimización permite encontrar los puntos de equilibrio, en ingeniería la forma óptima de un empaque, en óptica el mejor camino entre dos puntos. Nos desviamos de la estructura general de presentar una sola situación problema, porque este capítulo está lleno de ejemplos y situaciones problema.

4.1. Las derivadas aplicadas al movimiento, y sistemas computarizados de álgebra para derivadas

4.1.1. Ecuaciones diferenciales y unidades de las derivadas

Desde el punto de vista gráfico, el valor de la derivada en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Ahora, ¿cuál es la interpretación de la derivada de una función? La interpretación depende de las unidades de las funciones que estemos derivando.

4.1.1.1. Definición, unidades de las derivadas:

- La operación de derivar cambia las unidades de la cantidad que estamos derivando.
- En el operador de derivada tiene unidades del inverso de la variable independiente. Por ejemplo $\frac{d}{dx}$, tiene unidades de $\frac{1}{[x]}$, o $\frac{1}{m}$ en el S.I.
- La derivada de orden n tiene unidades del inverso de la variable independiente a la n. Por ejemplo, $\frac{d}{dt^2}$ tiene unidades de $\frac{1}{[t]^2}$, o $\frac{1}{s^2}$ en S.I.

4.1.1.2. Definición, ¿qué unidades tiene una cantidad?: en ciencias, ciencias sociales e ingenierías, las cantidades tienen unidades. Para simbolizar "las unidades de" se usan paréntesis cuadrados: $[u]$, significa "las unidades de u".

4.1.1.3. Ejemplo, unidades de cinemática (movimiento): en cinemática las unidades principales (sistema internacional de unidades - SI), son:

- Posición: tiene unidades de metros: $[x] = m$
- Tiempo: tiene unidades de segundos: $[t] = s$

Ejemplo
Un corredor está localizado a $x = 3m$ del inicio de una carrera.
Las unidades de x son: $[x] = m$

4.1.1.4. Definición, unidades dependientes en la cinemática: las unidades dependientes en cinemática son:

- Velocidad: $v = \frac{dx}{dt}$ la derivada de la posición con respecto al tiempo.
  $[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{m}{s}$
- Aceleración: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, luego la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo.
  $[a] = \frac{[x]}{[t^2]} = \frac{m}{s^2}$

4.1.1.5. Definición, algunas unidades dependientes en la dinámica:

- Fuerza: $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$. La masa por las unidades de aceleración.
  $[F] = \frac{[m][x]}{[t^2]} = \frac{kgm}{s^2}$
- Energía: $E = xF$
  $[E] = [x]\,[F] = \frac{kgm^2}{s^2} = 1J$

4.1.1.6. Definición, unidades de potencia: la potencia es la tasa de cambio de la energía como función del tiempo: $P = \frac{dE}{dt}$. Por lo tanto sus unidades son:
$[P] = \left[\frac{dE}{dt}\right] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{J}{s} = \frac{kgm^2}{s^3} = W$

La unidad de potencia es el Vatio, simbolizado por la letra W.

4.1.1.7. Ejercicio, unidades de energía: ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen unidades de energía?

A. Ws

B. $\frac{kgm^3}{s^2}$

C. $\frac{dJ}{dt}$

D. $\frac{dF}{dt}$

E. $\frac{W}{s}$

Solución: ¿Es posible construir una unidad dependiente del Vatio, W, que tenga unidades de energía? *Sí.*
$1W = \frac{1J}{1s}$
entonces: $1J = 1W1s$
En su factura de luz se usa el kilovatio hora, que corresponde a mil vatios, durante una hora:
$[kWh] = [W]\,[h] = Ws = J$

En resumen: son unidades de energía: el Julio J, y el Vatio hora Wh. Son unidades de tasas de cambio de energía con respecto al tiempo: el Vatio, W.

4.1.1.8. Definición, definir las ecuaciones diferenciales: la primera etapa de un problema de ecuaciones diferenciales consiste en identificar la información que está en palabras y convertirla en lenguaje matemático simbólico.

- Identifique los valores numéricos, corresponden a cantidades conocidas, asígneles nombre. Pueden ser variables o parámetros.
- Identifique las variables desconocidas, asígneles nombre. Pueden ser funciones o variables.
- Identifique la relación entre las variables y las funciones. Puede ser una operación, como derivar, una igualdad, una desigualdad, o un modelo matemático.
- Tenga en cuenta las unidades, le pueden ayudar a determinar si la expresión simbólica tiene o no tiene sentido matemático.
- Habrá palabras claves que puede relacionar con los conceptos que ya conoce. Por ejemplo una “tasa” puede ser una derivada, una tasa promedio, o una división. Hay que determinar según el contexto.

4.1.1.9. Ejercicio, ecuaciones diferenciales: un corredor se mueve en una pista lineal. Sea $s(t)$ la función que representa la posición del corredor como función del tiempo. s está en metros y t está en segundos. ¿Qué función matemática representa la siguiente frase: "Después de 1 hora, la velocidad del corredor es de $3\ m/s$"? Ayuda: en 1 h hay $3600\ s$.

A. $s(3600) = 3\frac{m}{s}$

B. $s(3) = 3600\ s$

C. $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=3600} = 3\frac{m}{s}$

D. $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=3} = 3600\frac{m}{s}$

Solución en la nota al pie: [1]

4.1.1.10. Ejercicio, ecuaciones diferenciales: un ciclista se encuentra en una prueba de resistencia. Sea $E(t)$ la energía total que ha consumido el ciclista en el tiempo t. E está en Julios y t está en segundos. ¿Qué función matemática representa la siguiente frase: "Después de 1 hora, la energía consumida es de 2400 kJ"?

A. $E(3600) = 2400kJ$

B. $E(2400) = 3600\ s$

C. $\frac{dE}{dt}\Big|_{t=3600} = 2400kJ$

D. $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=2400} = 3600kJ$

4.1.1.11. Ejercicio, voz a voz: un rumor se transmite mediante el "voz a voz". Cada persona les cuenta a algunas personas en su círculo social, los cuales a su vez lo contarán a más personas. Sea $N(t)$ el número de personas que saben del rumor en el tiempo t.

Supongamos que para cierto rumor la tasa de expansión siempre es 4 veces el número de personas que conocen del rumor. ¿Cuál de las siguientes expresiones matemáticas representa esa situación?

A. $\frac{dN}{dt} = 4$

B. $\frac{dN}{dt}\Big|_{t=4} = 4$

C. $\frac{dN}{dt} = 4N$

D. $N(t) = 4$

E. $N(t) = 1$

[1] Veamos cada una de las opciones $s(3600) = 3\frac{m}{s}$: se lee como: la posición en 3600 s es 3 m/s; no solo no es lo que nos preguntaban, también tiene las unidades mal. $s(3) = 3600\ s$: Se lee como: la posición, en 3 s es 3600 metros; no es lo que nos preguntaban. $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=3} = 3600\frac{m}{s}$ Se lee como: la velocidad, a los 3 segundos es 3600 metros por segundo; no es lo que preguntaban. $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=3600} = 3\frac{m}{s}$ Se lee como: la velocidad, a los 3600 segundos, es 3 metros por segundo; que es lo que nos preguntan.

4.1.2. Sistemas de álgebra computarizada: GeoGebra en el computador

En esta sección vamos a utilizar GeoGebra, un software libre para aprender matemáticas. Para comenzar, seleccione en el menú "Vista" las opciones "Cálculo Simbólico (CAS)" y "Vista Gráfica":

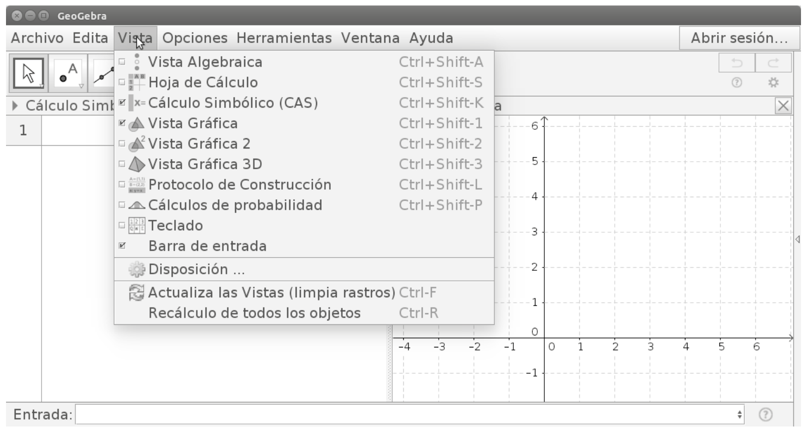


Figura 4.1. GeoGebra: el menú "Vista" permite personalizar la forma como se ve y funciona el programa

Existen unas diferencias en notación entre las matemáticas y los programas de cálculo simbólico. En GeoGebra, para definir una función en la vista de cálculo simbólico, se usa la notación:

:=

En lugar de solo el símbolo:

$$=$$

Ejemplo:
Para definir la función

$$f(x) = (3x^2 + 1)\sin x$$

En la Vista CAS de GeoGebra, se usa la expresión:

`f(x):=(3x^2+1) sen (x)`

Para escribir esta función se hace clic en la celda vacía y allí se escribe la expresión. Quedará como se ve en la figura 4.2.

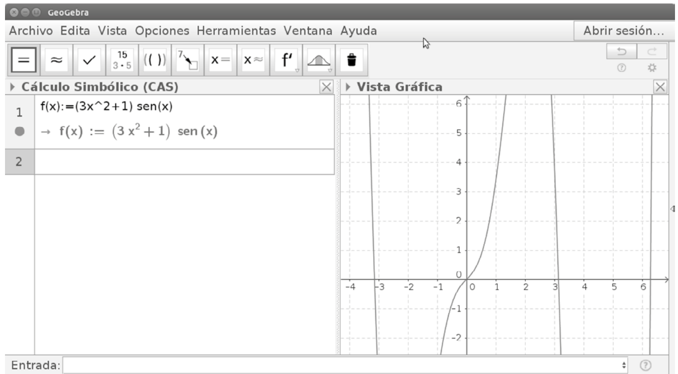


Figura 4.2. GeoGebra, función $f(x) = (3x^2 + 1)\sin x$

La Vista CAS se divide en celdas. Cada celda está numerada. En el ejemplo anterior, la función quedó definida en la celda 1. En el CAS se pueden escribir expresiones matemáticas sin definirlas como funciones. En este caso, en la Vista CAS, aparecerá un círculo abierto sin rellenar.

4.1.2.1. Ejemplo, ingreso de funciones en el software: para ingresar una expresión matemática, sin necesidad de definirla como función, se ingresa el texto en la celda, como se ve en la figura 4.3. Al pulsar enter queda definida la expresión. El círculo sin rellenar indica que no es una función, observe la figura 4.4.

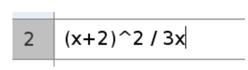


Figura 4.3. Ingreso de funciones

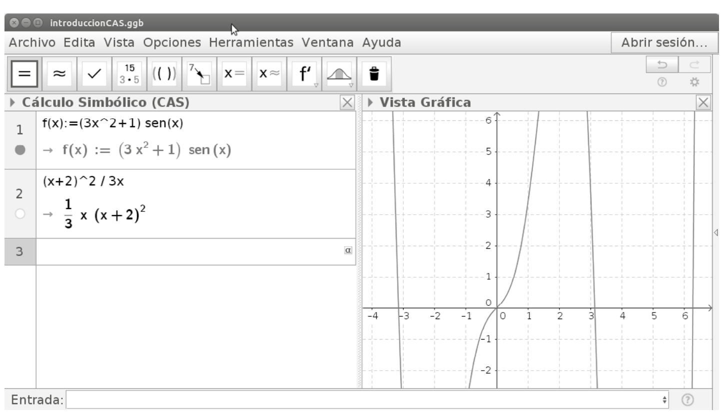


Figura 4.4. La expresión no se definió como una función en la lógica de GeoGebra

Si se hace clic en la celda, el programa define la expresión como una función, como se ve en la figura 4.5.

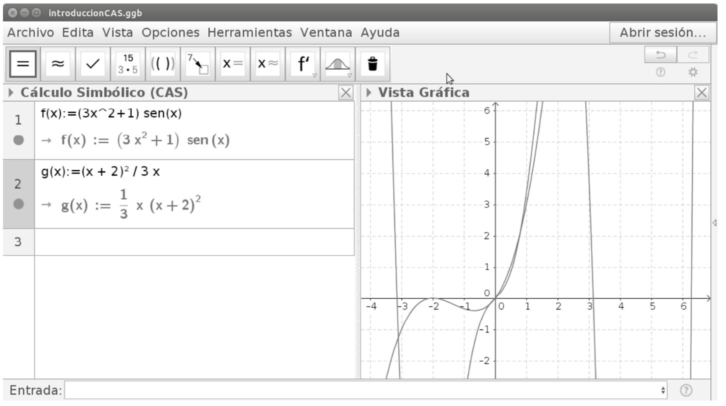


Figura 4.5. La expresión se definió como una función en la lógica de GeoGebra

Las celdas que tengan funciones definidas y que estén marcadas con el punto azul se representan también en la "Vista Gráfica".

4.1.2.2. Ejemplo, ocultar la vista gráfica: si se hace clic en la celda 2, la celda ya no queda marcada (círculo abierto) y no se ve en la Vista Gráfica; como se aprecia en la figura 4.6.

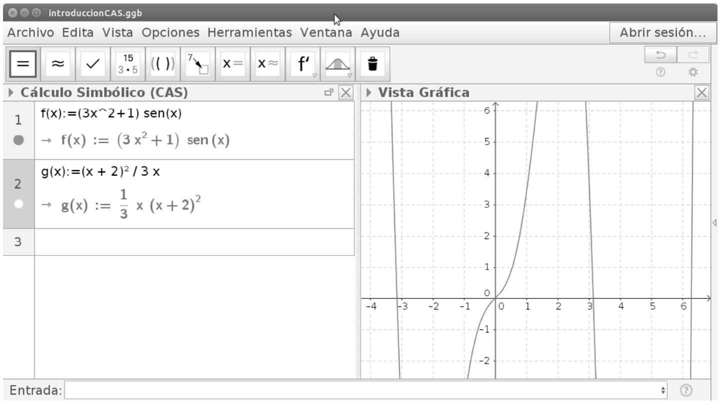


Figura 4.6. "Vista Gráfica" en GeoGebra

4.1.3. CAS: GeoGebra en Android

La aplicación GeoGebra también se encuentra disponible para Android. En la tienda de aplicaciones Play Store, se puede buscar con la palabra clave GeoGebra, o con el nombre completo de la aplicación, como se ve en la figura 4.7.

Para entrar una función es necesario pulsar en el cuadro blanco de texto. Aparece el cursor vertical.

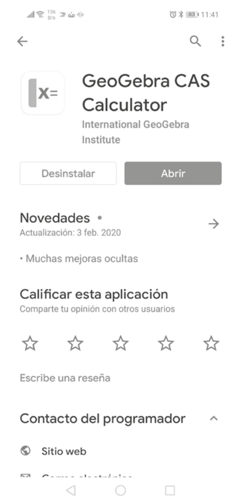


Figura 4.7. GeoGebra CAS Calculator en Google Play Store

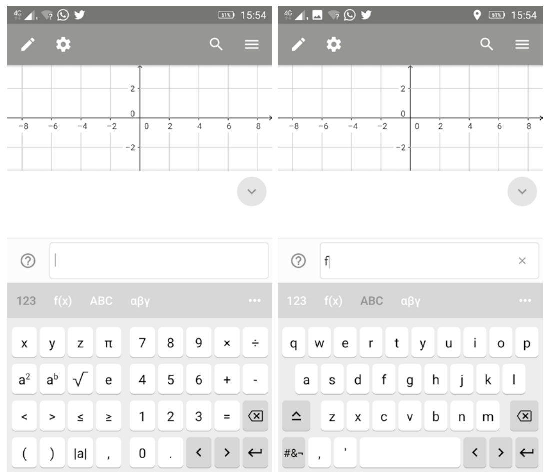


Figura 4.8. Pantalla inicial de la app, señalando el teclado numérico (izq.); se selecciona el teclado alfanumérico, para ingresar el nombre de la función (der.)

A continuación se escribe el nombre de la función (letra f), seguido por los paréntesis donde se define la variable (letra x). Es necesario alternar entre el teclado en letras (ABC), y el teclado en números (123).

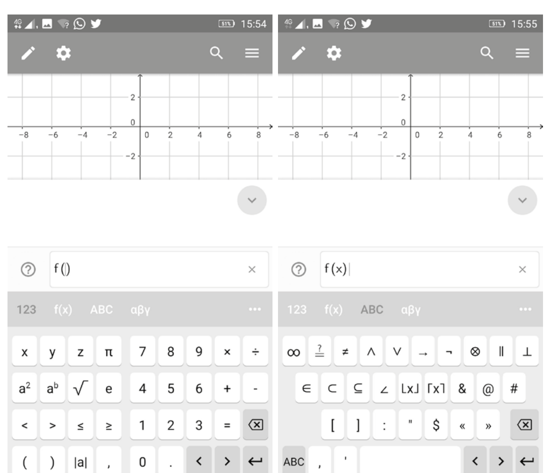


Figura 4.9. Se alterna entre los diferentes teclados para escribir f

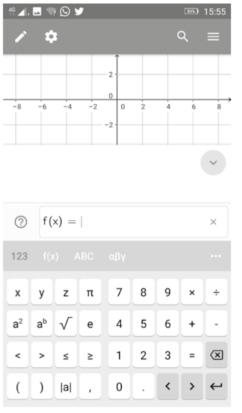


Figura 4.10. Se alterna entre los diferentes teclados para escribir f

Después de aprender a usar el teclado, se puede intentar escribir el texto completo de la función.

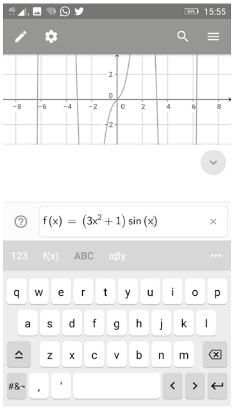


Figura 4.11. Texto completo de la función

Después de pulsar quedará definida la función.

4.1.4. Cálculo de las derivadas mediante un CAS: GeoGebra en el computador

En esta sección vamos a utilizar GeoGebra, un software libre para aprender matemáticas. Para calcular la derivada de la función, se usa el comando `Derivada` de GeoGebra. En la vista CAS se escribe el comando y se presiona enter. Si se marca la celda, quedará definida una función, la función derivada.

4.1.4.1. Ejemplo, derivada de la función f: ingresamos el comando Derivada en la celda 3, como se ve en la figura 4.12. Al presionar Enter, queda definida la expresión matemática; como se ve en la figura 4.13.

Figura 4.12. Comando derivada

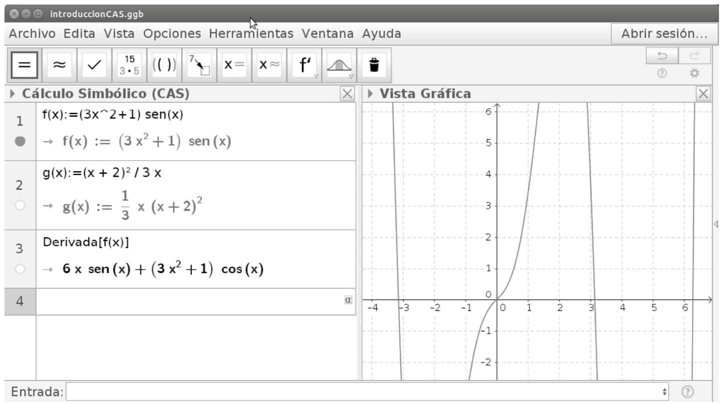


Figura 4.13. Expresión definida en una Celda

Si se selecciona la celda, GeoGebra definirá la función y la presentará en la Vista Gráfica:

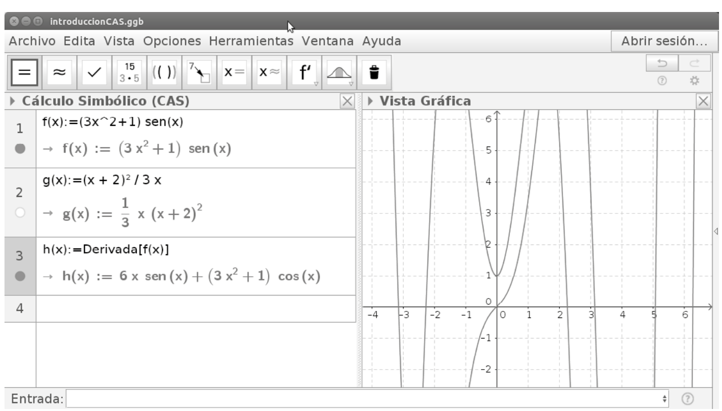


Figura 4.14. “Vista Gráfica” en GeoGebra para el computador

Aquí se debe cambiar el color, o el tipo de línea, de la función derivada, para que en la representación se pueda diferenciar una de la otra. Haciendo clic secundario sobre la función; como se ve en la figura 4.15

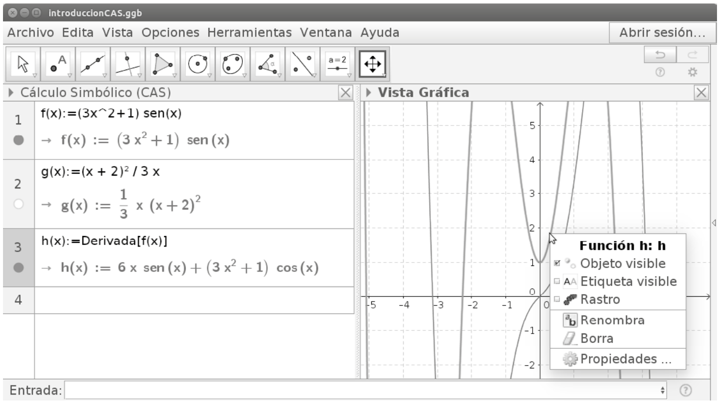


Figura 4.15. Seleccionar la función en GeoGebra para el computador

Se elige “Propiedades” y se puede cambiar color de la línea y estilo del trazo.

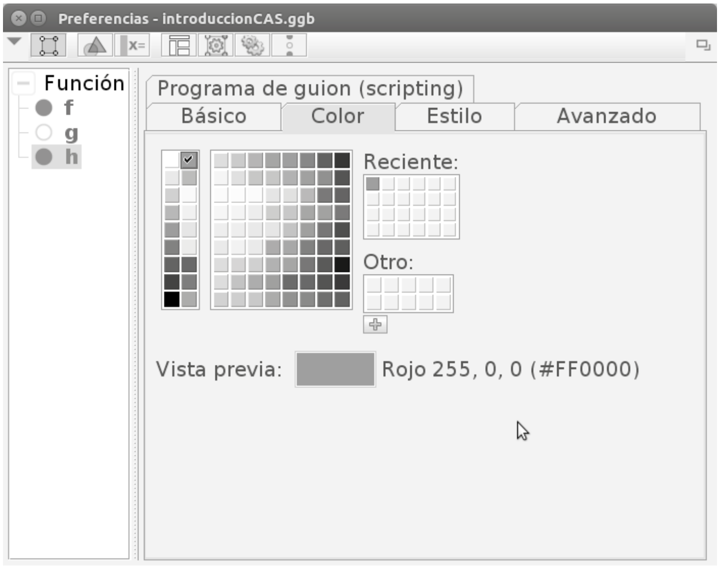


Figura 4.16. Estilo de trazo

Finalmente, se puede cambiar también el rango en que se muestran las gráficas. Se elige la Vista Gráfica y se selecciona la herramienta “Desplaza la Vista Gráfica”.

Figura 4.17. Desplaza vista gráfica

Al pasar el cursor sobre el eje, el puntero cambiará la imagen de la flecha. Si se arrastra se "estira" o "encoje" el eje, es decir, se cambia el intervalo de visualización de la función, como se ve en la figura 4.18.

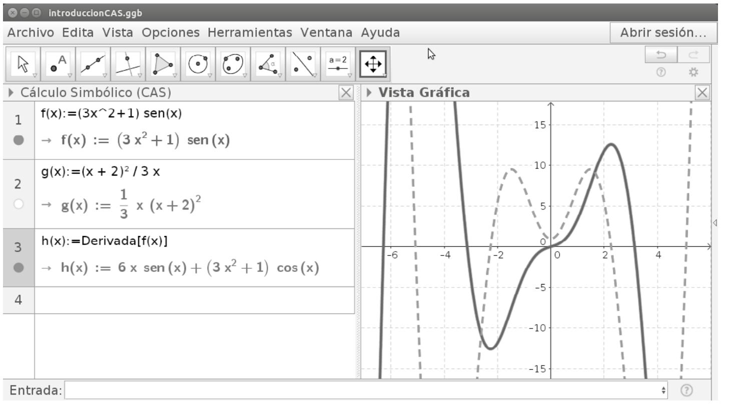


Figura 4.18. Intervalo de visualización

4.1.5. Cálculo de las derivadas mediante un CAS: GeoGebra en Android

La aplicación de GeoGebra también se encuentra disponible para Android. En la tienda de aplicaciones Play Store, se puede buscar con la palabra clave GeoGebra, o con el nombre completo de la aplicación, como se ve en la figura 4.7.

Después de definir la función, se puede pulsar sobre el operador derivada $\frac{d}{dx}$, que está bajo el menú `f(x)`; como se ve en la figura 4.19.

Figura 4.19. GeoGebra operador derivada

La APP ahora muestra el texto `derivada()`. Hay dos opciones. O se puede escribir `f`, y pulsar Enter:

Figura 4.20. Derivada en GeoGebra

O también se puede ir al menú numérico `ABC`, y allí pulsar sobre la tecla `ans`.

Figura 4.21. Menú numérico de GeoGebra

La APP vuelve a escribir la función anterior, luego ahora podemos pulsar Enter y calculará la derivada.

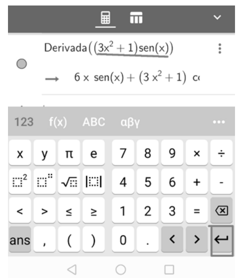


Figura 4.22. Calcular la derivada en GeoGebra

Finalmente se obtiene la expresión de la derivada de la función y la gráfica que muestra tanto la función, como la derivada:

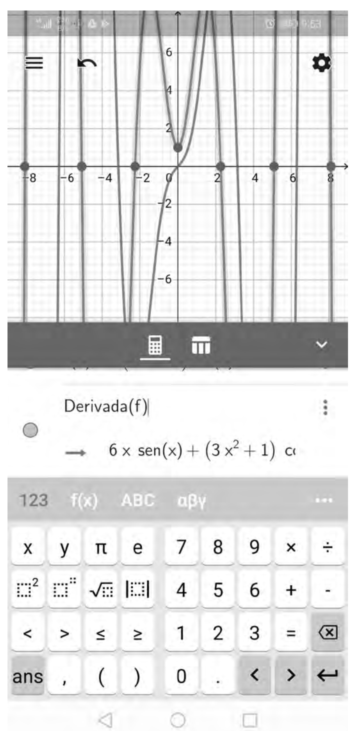


Figura 4.23. Calcular la derivada en GeoGebra

4.1.6. Resumen: comandos algebraicos y de derivadas en GeoGebra

Si no se especifica, la definición funciona igual en la vista algebraica y en la vista CAS: en la Vista CAS define la función f:

```
f(x):=
```

En la Vista Algebraica, define la función f:

```
f(x)=
```

Simplifica una función f (entre los paréntesis cuadrados va la expresión a simplificar):

```
Simplifica[f(x)]
```

Factoriza un polinomio P:

```
Factoriza[P(x)]
```

Calcula la derivada de una función f, definida antes:

```
Derivada[f]
Derivada[f(x)]
f'(x)
```

Para una explicación a profundidad de GeoGebra, visite la página web: https://www.GeoGebra.org/m/FUPJeDQT#material/qbsaDjjF, "interfaz de usuario de GeoGebra".

> *4.1.6.1. Definición, CAS de GeoGebra en línea:* es posible trabajar el CAS de GeoGebra en línea, sin instalarlo en el computador: https://www.GeoGebra.org/cas

Ejercicios y tareas

4.1.6.2. • Tarea, recordar los comandos:

I. Sin usar el computador, intente predecir qué pasará cuando teclee cada uno de los siguientes comandos, en orden:

   a) `f(x) = Desarrolla[(x+3)^2]`

   b) `Derivada[f(x)]`

c) `f(x)=Simplifica[(x+3)^2]`

d) `h(x)=Factoriza[x^3+9x^2+27x+27]`

e) `Derivada[h(x)]`

II. Ahora sí, teclee los comandos en GeoGebra y compare sus resultados obtenidos con lo que esperaba obtener.

4.1.6.3. Ejercicio, recordar los comandos:

I. Sin usar el computador, intente predecir qué pasará cuando teclee cada uno de los siguientes comandos, en orden:

a) `f(x) = Desarrolla[(2x+3)^2]`

b) `Derivada[f(x)]`

c) `f(x)=Simplifica[(x^2+2x)^2]`

d) `h(x)=Factoriza[x^3+12x^2+48x+64]`

e) `Derivada[h(x)]`

II. Ahora sí, teclee los comandos en GeoGebra y compare sus resultados obtenidos con lo que esperaba obtener.

4.1.6.4. ★ *Tarea, modelación:* una empresa que construye montañas rusas está diseñando una nueva atracción. Para una sección de la pista, piensan usar la siguiente función:

$$h(x) = \sin(3x + \cos(x) - 1) \;\; 0 < x < 10 \qquad (4.1)$$

Tanto la altura h como la distancia horizontal x están en metros.

Para construir una primera prueba quieren estar seguros de que la pendiente máxima que tendrá este segmento de la pista no supere el valor de 5.

- Piense en una estrategia para, usando CAS, y mediante una gráfica, explorar numéricamente si la pista definida de esta forma cumple la restricción en pendiente.
- Implemente su estrategia diseñada en el punto anterior.
- *Únicamente después de haber hecho los puntos anteriores*.
- Después de ver el dibujo de la función, uno de los diseñadores llega a la conclusión de que esa pista sería muy sencilla. Le pide a usted diseñar otra pista, que tenga mayor variación en altura, y

que cumpla la restricción de la pendiente. Haga una exploración numérica, (proponiendo funciones no tan sencillas: racionales, polinomios, que contengan funciones trascendentes), y proponga una nueva función para la sección de la pista.

Compruebe si su estrategia es similar a la mía, que se encuentra en la nota al pie: [2]

4.1.6.5. • *Tarea, ecuaciones diferenciales:* una empresa produce harina de arepas a base de maíz. Ponen g gramos de maíz en un molino eléctrico, con otros ingredientes, para producir harina de maíz.

Sea

1. $C(g)$ el costo de la empresa para comprar g gramos de maíz
2. $K(g)$ la cantidad de harina, en kg, que produce la empresa al usar g gramos de maíz.
3. $u(t)$ la tasa instantánea a la que ingresa maíz al molino.

Asuma que las funciones C, K y u son invertibles y diferenciables.

A. Exprese en una igualdad matemática que involucre lo siguiente: "Cuesta 1000 pesos menos comprar 31 kilos de maíz que comprar 32 kilos de maíz".

B. Exprese en una desigualdad matemática que involucre lo siguiente: "El precio del maíz crece más rápidamente (como función de la cantidad) cuando se compran 10 kilos de maíz que cuando se compran 30 kilos de maíz".

C. Represente gráficamente una función costo para la cual el precio de 30 kilos de maíz es mayor al precio de 10 kilos de maíz, y también el precio de 10 kilos crece más rápidamente que el precio de 30 kilos de maíz.

4.1.6.6. • *Tarea, ecuaciones diferenciales:* sea $W(t)$ la temperatura en el interior de una torta que está en el horno, en el minuto t después de que se prendió el horno. La temperatura W está en grados centígrados y el tiempo t en minutos.

[2] El valor de la pendiente de la función h está dado por su derivada. Entonces la exploración numérica consiste en: primero, calcular $h'(x)$, usando un CAS; segundo, graficar h'; tercero, comprobar observando la gráfica si existe algún valor de x, en el intervalo $0 < x < 10$, para el cual la derivada es mayor a 5.

Escriba una ecuación matemática que represente la siguiente frase: "El cambio de temperatura de la torta en los primeros cinco minutos que estuvo en el horno es la mitad del cambio en los siguientes cinco minutos".

4.1.6.7. • *Tarea, derivadas:* calcule la derivada de las siguientes funciones, usando la regla del producto:

a. $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, sin usar CAS

b. $f(x) = e^x e^x$, sin usar CAS

c. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(x^2 + 1)$, usando CAS

d. $f(x) = (e^x + 1)(2e^x + 1)$, usando CAS

4.1.6.8. ★ *Tarea, tasas:* sea $E(d)$ la energía eléctrica acumulada que ha dado una turbina de viento, al final del día d del año. Los días están numerados (el 4 de febrero corresponde a $d = 35$). Las unidades de E son kWh. Cada una de las siguientes frases expresa una igualdad matemática. Escriba una única expresión matemática para cada frase. Sus expresiones matemáticas pueden involucrar E, sus derivadas, y su inversa.

a) La turbina ha dado 2 MWh de electricidad hasta el 4 de febrero.

b) El 4 de febrero, la tasa a la que la turbina está dando electricidad es de 8 MWh por día.

c) Cuando la turbina ha dado 20 MWh de electricidad, le toma aproximadamente dos días para dar otros 2000 kWh de electricidad.

d) El 5 de febrero tomaría un día dar 1000 kWh de electricidad.

Respuesta en la nota al pie: [3]

[3] a) $E(35) = 2\,MWh = 2000\,kWh$
b) $\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t=35} = \frac{8MWh}{1d} = \frac{8000kWh}{1d}$
c) Si toma dos días generar 2000 kWh, entonces se está generando electricidad a una tasa de $\frac{2000kWh}{2d} = 1000kWh/d$. Entonces:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{E=20000} = \frac{2000kWh}{2d} = \frac{1000kWh}{d}$$

Ahora, E es función del tiempo, luego su derivada también es función del tiempo. Por lo tanto es mejor usar la condición sobre el tiempo transcurrido, no sobre la energía generada. El tiempo para el cual se ha generado $20MWh$, matemáticamente, se simboliza

4.1.6.9. Ejercicio, derivadas: encuentre la derivada de las siguientes funciones, con ayuda del CAS:

a. $f(x) = (x^7 + 3x + 22)\cos x$

b. $g(x) = \left(e^x + x^2\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sin x}\right)$

c. $h(x) = (x^4 + 5x^3 + 2x^4)(x^3 + x^2 + 2x)$

d. $L(x) = (x^{33} + 8x^{14} + x^3)(x^{-1} + x^{-2})$

e. $M(x) = (\cos x + e^x)^4$

f. $R(x) = (x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3)(\cos x)(e^x)$

4.1.6.10. ★ *Tarea, derivadas:* calcule la derivada de las siguientes funciones, usando la regla del producto:

a. $f(x) = e^x(x^4+4x^2+1)$, sin usar CAS; luego compruebe usando CAS.

b. $f(x) = x^{\frac{5}{3}}e^x$, sin usar CAS; luego compruebe usando CAS.

c. $f(x) = (e^x+x)(e^x-x)$, sin usar CAS; luego compruebe usando CAS.

d. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(x^2 + x + 3)$, usando CAS.

e. $f(x) = (e^x - e)(2e^x + e)$, usando CAS

f. $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 3x\right)(e^x + 2)$, usando CAS

4.1.6.11. • *Tarea, derivadas:*

a. Encuentre, sin ayuda del computador, la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = (x+3)(x-8)$$

---

por: $t = E^{-1}(20000)$, luego:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t=E^{-1}(20000)} = \frac{2000kWh}{2d} = \frac{1000kWh}{d}$$

d) Si toma un día generar 1000 kWh de electricidad, entonces la tasa a la cual se está generando electricidad es de $1000kWh/d$. Entonces, pensando en una tasa instantánea, se puede decir que:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t=35} = \frac{1000kWh}{1d}$$

También es cierto que si toma un día generar 1000 kWh, entonces la diferencia entre lo generado el 23 de mayo y lo generado el 22 de mayo es de 1000 kWh. Entonces:

$$E(35) - E(34) = 1000kWh$$

b. Sin ayuda del computador, construya la gráfica de la derivada.

c. Para corroborar, use un CAS para graficar $f(x)$ y su derivada y compare con el resultado analítico. Deben ser iguales.

4.1.6.12. • *Tarea, derivadas:* encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x}{1+x}$, sin usar CAS.

b. $f(x) = \frac{x+5}{x-5}$, sin usar CAS.

c. $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{x}}$, usando CAS.

d. $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$, usando CAS.

e. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2}$, usando CAS.

4.1.6.13. ★ *Tarea, derivadas:* encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, sin usar CAS.

b. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{x+1}$, sin usar CAS.

c. $f(x) = \frac{1}{ke^x+1}$, sin usar CAS.

d. $f(x) = \frac{x}{x+\frac{a}{x}}$, sin usar CAS.

e. $f(x) = \frac{1-xe^x}{1+x}$, usando CAS.

f. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{x^2+1}$, usando CAS.

g. $f(x) = \frac{e^x \sin x}{x+\cos x}$, usando CAS.

4.1.6.14. *Ejercicio, derivadas:* encuentre la derivada de las siguientes funciones, con ayuda del CAS:

a. $f(x) = \frac{x^5+3x+22}{\cos x}$

b. $g(x) = \frac{e^x+x^{22}}{\cos x+\frac{1}{\sin x}}$

c. $h(x) = \frac{x^{4.5}+5x^{\pi}+2x^4}{x^3+x^2+2x}$

d. $L(x) = \frac{x^{13}+8x^4+x^3}{x^{-1}+x^{-2}}$

e. $M(x) = \frac{1}{(\cos x+e^x)^4}$

f. $R(x) = \frac{x^6+2x^4+x^2}{e^x \cos x}$

4.1.6.15. ★ *Tarea, derivadas:* encuentre la ecuación de la recta tangente a la función en el número dado. Calcule la derivada con el CAS. No utilice el comando "recta tangente" del CAS.

a. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $(-1, \frac{1}{2})$

b. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ en $x = 3$

c. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ en $(1, e)$

d. $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ en $x = 1$

e. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ en $x = 1$.

4.1.6.16. *Ejercicio, recta tangente:* usando el comando "recta tangente" del CAS, grafique la ecuación de la recta tangente del ejercicio 4.1.6.15, compare con los resultados que había obtenido antes.

4.1.6.17. ★ *Tarea, derivadas:* encuentre la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^x \cos x$, sin usar CAS y corrobore con lo que obtiene con el CAS.

b. $f(x) = \frac{\cos x+1}{\sin x-1}$, usando CAS.

c. $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cos x$, usando CAS.

4.1.6.18. • *Tarea, derivadas:* calcule la derivada de las siguientes funciones, usando la regla del cociente, usando CAS.

a. $f(x) = \left(\frac{\frac{1}{x}+3x}{e^x+2}\right)$

b. $f(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{e^x}$

4.1.6.19. • *Tarea, recta tangente:* encuentre la ecuación de la recta tangente a la función dada en el número específico:
$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ en el número 1, usando CAS solo para hallar la derivada.

4.1.6.20. *Ejercicio, procedimientos para derivar:* suponga que queremos calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = (x^{-1} + 1)(x^4 + 3x^3 + 2x)$$

Tenemos dos posibles procedimientos:

I. Juan propone: simplificar la expresión aplicando la regla distributiva de la multiplicación, y luego derivar:

$$f_j = x^3 + 3x^2 + 2 + x^4 + 3x^3 + 2x$$

$$f_j = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

$$f_j' = 4x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$

II. María propone: aplicar la regla de la derivada del producto, manteniendo las potencias negativas:

$$\begin{aligned} f'_m &= (-x^{-2})(x^4 + 3x^3 + 2x) \\ &+ (x^{-1} + 1)(4x^3 + 9x^2 + 2) \end{aligned}$$

Responda:

a. Las dos funciones f'_m y f'_j, ¿son equivalentes? Si no son, ¿en qué se diferencian? (ayuda, piense en el dominio de esas funciones)

b. Si las funciones son diferentes, ¿cuál de ellas es la derivada de la función f?, ¿hay alguna restricción que se le puede poner a alguna de ellas para que sea idéntica a la otra?

4.2. Aplicación de la derivada a linealización y estimación por diferenciales.

4.2.1. Aproximaciones lineales y diferenciales.

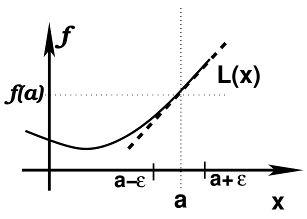


Figura 4.24. Representación de la linealización. La línea continua representa la función f, la línea discontinua la función linealización L

Las aplicaciones del cálculo a la linealización y la estimación por diferenciales son conocidas ampliamente y tratadas en los diferentes textos estándar de cálculo; como (Stewart y Pozo, 2002); (Thomas y Weir, 2005).

4.2.1.1. Definición, aproximación de f mediante L: en algunos casos es posible reemplazar f por una función más sencilla, lineal, L.

En la gráfica representada en la figura 4.24, tenemos $f(a) = L(a)$, y "cerca a $x = a$" f y L son muy similares. En lenguaje matemático:

$$f(x) \approx L(x) \quad \text{para } a - \epsilon < x < a + \epsilon$$

L es una aproximación lineal de f en la vecindad de $x = a$. Se calcula:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Note que esta es la ecuación de una línea recta; tanto $f(a)$, como $f'(a)$, como a, son números. *La función L se llama linealización de f en a.*

Ejercicios y ejemplos

4.2.1.2. Ejemplo, linealización de la función $f(x) = x^2$, alrededor de $x = 1$: para calcular la linealización, es necesario saber algunos valores funcionales como de las derivadas:

$$\begin{aligned} f(1) &= x^2\big|_{x=1} = 1 \\ f'(1) &= 2x\big|_{x=1} = 2 \end{aligned}$$

Entonces obtenemos:

$$L(x) = 1 + 2(x - 1) \tag{4.2}$$

En la figura 4.25 se muestra la función y la linealización. Note que en esa gráfica los valores de x van desde -1 hasta 1.5.

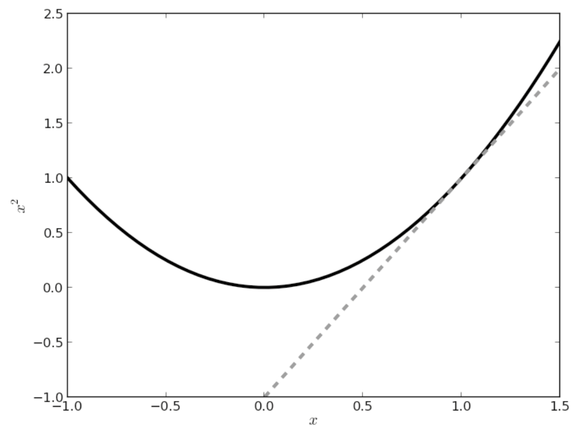


Figura 4.25. x^2 y su tangente en el punto $x = 1$: $2x - 1$

La linealización se hace más clara si se muestran valores más cercanos a $x = 1$, desde 0.9 hasta 1.1.

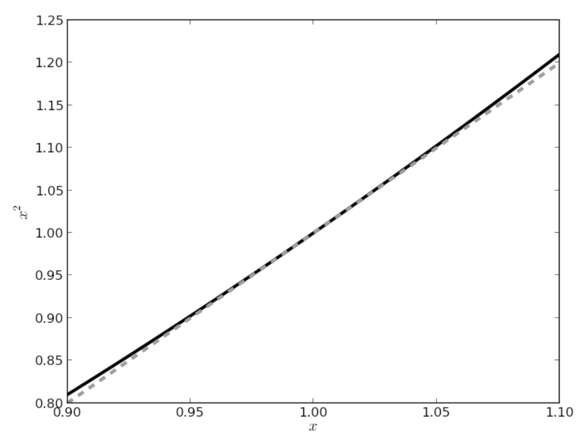


Figura 4.26. x^2 y su tangente en el punto $x = 1$: $2x - 1$, acercamiento

4.2.1.3. Ejercicio, linealización: ¿cuál de las siguientes es la linealización de la función $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$?

a. $L(x) = -1 - 2(x + 1)$

b. $L(x) = -1 + 2(x + 1)$

c. $L(x) = 1 + 10(x - 1)$

d. $L(x) = 1 - 10(x - 1)$

e. $L(x) = 6x - 4$

f. $L(x) = 6a - 4$

4.2.1.4. Ejercicio, linealización: determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$, en $x = 0$. Grafique tanto la función, como la linealización, en los intervalos $(-1, 1)$ y $(-0.1, 0.1)$; ya sea con tabla de valores o con un CAS.

4.2.1.5. Ejemplo, aproximación de sen x*:* ¿Cómo se puede aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en la vecindad de $x = 0$?

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

La derivada es: $f'(x) = \cos x$.
Los datos necesarios son:

$$a = 0.$$
$$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$
$$f'(0) = \cos 0 = 1.$$

De esta forma, la aproximación lineal es:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$L(x) = 0 + 1(x - 0)$$

$$L(x) = x$$

La aproximación lineal de la función sen x cerca de $x = 0$ es la función lineal $L(x) = x$, como se muestra en la figura 4.27.

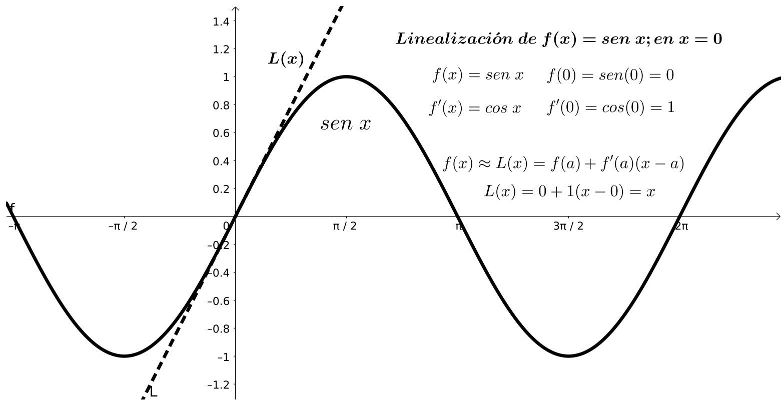


Figura 4.27. Función sin x y su aproximación lineal cerca a 0, la función x

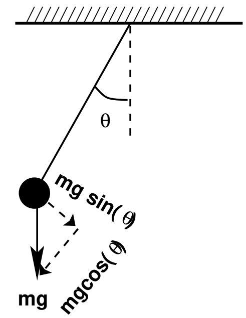


Figura 4.28. Diagrama de cuerpo libre del péndulo

Respuesta: $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $f'(0) = 1/2$ $f(0) = 1$. Entonces $L(x) = 1 + \frac{x}{2}$

4.2.1.6. Ejercicio, linealización: determine la linealización de $f(x) = cos(x)$ en $x = \pi/2$. Grafique la función, tanto la linealización, en el intervalo $(-\pi/4, 3\pi/2)$

4.2.1.7. Ejemplo, el péndulo y el oscilador armónico: ¿cuáles son las fuerzas que actúan sobre un péndulo? ¿Y cuál es la expresión sencilla que describe el movimiento de la masa cuando el sistema tiene oscilaciones pequeñas?

En el caso del péndulo, la fuerza que actúa sobre el objeto es el peso. Para todos los puntos el peso es “hacia abajo”. Ahora, se puede pensar en otro sistema de coordenadas, en el que una dirección es a lo largo del hilo que soporta el péndulo (dirección radial) y otra es en la dirección que cambia el ángulo (dirección tangencial, θ); como se representa en la figura 4.28. Así, es útil escribir el peso como la suma de dos componentes. ¿Por qué? Sencillo, el péndulo no cambia su longitud, luego nada cambia en la dirección radial. La fuerza es, entonces: $F = mg\sin(\theta)$. Cuando el péndulo se mueve cerca del mínimo, $\theta \approx 0$, luego se puede hacer la aproximación lineal alrededor del cero como $\sin(\theta) \approx \theta$.

4.2.1.8. Ejemplo, linealización de $f(x) = e^x \sin x$ cerca a $a = \pi$: es necesario tener $f(\pi)$, $f'(\pi)$, entonces:

$$f(\pi) = e^{\pi} \sin \pi = 0$$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$f'(\pi) = e^{\pi}(\sin\pi + \cos\pi)$$

$$f'(\pi) = e^{\pi}(-1) \approx -23.14$$

$$L(x) \approx -23.14(x - \pi)$$

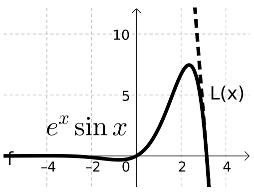


Figura 4.29. Función $e^x \sin x$ y su linealización cerca a π, la función $L(x) = -23.14(x - \pi)$

La gráfica muestra que la linealización es una buena aproximación de la función cerca al valor π. Para valores lejanos, por ejemplo $x = 2$, la linealización ya no es una buena aproximación, como se ve en la figura 4.29.

> *4.2.1.9. Definición, serie de Taylor:* la linealización $L(x)$ corresponde a los primeros términos de:
>
> $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \tag{4.3}$$
>
> Los puntos suspensivos reemplazan términos del orden $(x-a)^3$ y superiores; tienden a cero si $(x-a)$ es pequeño.

4.2.2. Diferenciales

> *4.2.2.1. Definición, diferenciales:* sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Llamemos dx a un cambio muy pequeño, de la variable independiente. Entonces habrá un cambio en la variable dependiente, que llamaremos el diferencial dy. Se puede calcular de la siguiente forma:
>
> $$df = dy = f'(x)dx \tag{4.4}$$
>
> Donde:
>
> $df = dy$: cambio en f
>
> dx : cambio en x
>
> $\frac{df}{dx} = f'(x)$ derivada de f.

4.2.2.2. Ejemplo, diferencial: ¿cuál es el diferencial dy, si $y = 3x^4 + 12$?
Obtenga un valor aproximado del cambio en la función y cuando $x \approx 1$, y $dx \approx 0.1$

Respuesta: la función es $f(x) = 3x^4 + 12$, por lo tanto su derivada es $f'(x) = 12x^3$. Entonces:

$$dy = f'(x)12x^2 dx. \tag{4.5}$$

Entonces:

$$dy = 12x^3 dx|_{x=1, dx=0.1} = 12(1)^3 \times 0.1 = 1.2 \tag{4.6}$$

4.2.2.3. Definición, cambio en una función: el cambio entre a y b de la función f se representa por Δf:

$$\Delta f = f(b) - f(a) \tag{4.7}$$

Los diferenciales pueden ser usados para aproximar la variación de una función.

4.2.2.4. Ejemplo, estimación de la variación de una función con la diferencial: la figura 4.30 muestra una función $f(x)$ en línea continua (azul).

Cuando la variable independiente varía entre a y b, la función varía entre $f(a)$ y $f(b)$.

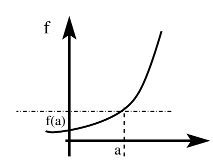


Figura 4.30. Una función arbitraria f

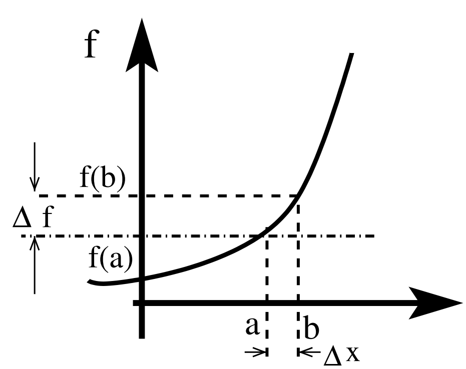


Figura 4.31. Δf y Δx, para una función f

$$\Delta x \quad = \quad b - a \tag{4.8}$$

$$\Delta f \quad = \quad f(b) - f(a) \tag{4.9}$$

La variación exacta de la función está dada por Δf. Esa variación se puede aproximar usando la diferencial. Recordemos que la derivada de la función f en a es el valor numérico:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \tag{4.10}$$

Donde la palabra límite quiere decir que se toman valores de Δx cada vez más pequeños. Usando el diferencial se puede aproximar el cambio en la función.

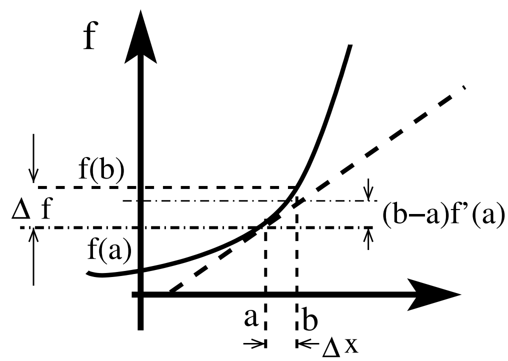


Figura 4.32. Valor real del cambio en la función representado por Δf; y su aproximación, el diferencial $(b-a)f'(a)$

$$df \quad = \quad f'(a)dx \tag{4.11}$$

$$\Delta f \quad \approx \quad (b-a)f'(a) \tag{4.12}$$

Es decir el valor exacto, Δf se aproxima por el diferencial, $df \Delta x$.

4.2.2.5. Ejemplo, ¿en cuánto cambia el valor de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ cuando x varía de 2 a 2.01?: para Δf, calcule el valor de la función en los dos puntos, 2 y 2.01:

$$f(2.01) = 2.01^3 + 2.01^2 - 2 \times 2.01 + 1$$

$$f(2.1) \approx 9.1407$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 9$$

El cambio de la función es $\Delta f = 9.1407 - 9 = 0.1407$.

4.2.2.6. Ejemplo, ¿en cuánto se aproxima el cambio de la función $f(x) = x^3+x^2-2x+1$ cuando x varía de 2 a 2.01?: usando la diferencial,

$$df = f'(x)dx$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 2 \\ f'(2) &= 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 2 = 14 \\ df &= 14dx \end{aligned}$$

Si $\Delta x = 0.01$, entonces

$$df \approx f'(2) \times \Delta x = 0.14$$

4.2.3. Estimación de la incertidumbre

Las diferenciales se pueden usar para estimar la incertidumbre en una medición. En el libro de Stewart la llaman "error en la medición" (Stewart y Pozo, 2002).

4.2.3.1. Ejemplo, radio de una esfera: se mide el radio de una esfera y se obtiene el valor de $21cm$. La incertidumbre en la medición del radio es de $0.05\ cm$. ¿Cuál es la incertidumbre en la medición del volumen de la esfera?

El volumen es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, por lo tanto la derivada del volumen con respecto al radio es:

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Y el diferencial de volumen:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Se estima la incertidumbre en:

$$dV = 4\pi(21cm)^2 \times 0.05cm = 277cm^3$$

¡Tenga cuidado con las unidades!

Otra forma de estimar es tomar la diferencia en volúmenes:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(21.05) - V(21.00) \\ &= 39070.1348 - 38792.3860 \\ &= 277.75 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Se puede ver que es similar al valor encontrado mediante la estimación, que fue de 277 cm^3.

4.2.4. Incertidumbre relativa e incertidumbre porcentual

4.2.4.1. Definición, incertidumbre relativa: se calcula dividiendo el valor de la incertidumbre sobre el valor de la cantidad.

$$IR_Q = \frac{\Delta Q}{Q}$$

4.2.4.2. Ejemplo, incertidumbre relativa: si la incertidumbre en el volumen es de 0.1 m^3 y el volumen es de 10 m^3, ¿cuál es la incertidumbre relativa?

$$IR_Q = \frac{0.1m^3}{10m^3} = 0.01$$

4.2.4.3. Definición, incertidumbre porcentual: es la incertidumbre relativa, expresada como un porcentaje

$$IP_Q = \frac{\Delta Q}{Q} \times 100\,\%$$

4.2.4.4. Ejemplo, Incertidumbre porcentual: si la incertidumbre en el volumen es de 0.1 m^3 y el volumen es de 10 m^3, ¿cuál es la incertidumbre porcentual?

$$IR_Q = \frac{0.1m^3}{10m^3} \times 100 = 1\,\%$$

4.2.5. En economía: la elasticidad

4.2.5.1. Definición, elasticidad de la demanda: para algunos productos el número de unidades vendidas es función del precio: $Q = Q(P)$. La *elasticidad de la demanda*, ϵ_d, se define como el cambio relativo de la cantidad dividido entre el cambio relativo del precio:

$$\epsilon_d = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

Los cambios absolutos ΔP y ΔQ se pueden aproximar por los diferenciales dP y dQ, obteniendo:

$$\epsilon_d = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = \frac{PdQ}{QdP} = \frac{\frac{dQ}{dP}}{\frac{Q}{P}}$$

En general

$$\epsilon = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{xdf}{fdx} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{f}{x}}$$

Interpretación

- df/dx se interpreta como: La tasa de cambio de la cantidad f con respecto a x.
- $f(x)/x$ es: El promedio de la función f.
- Por lo tanto ϵ_d se interpreta como: la tasa de cambio de f con respecto a x, dividido sobre el promedio de la función f.

4.2.5.2. Ejemplo, elasticidad de la demanda ϵ_d: si un bien tiene función de demanda $Q(P)$, y tiene un precio P, la elasticidad de la demanda se puede calcular como:

$$\epsilon_d = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$$

Hallar ϵ_d si la función de demanda es:

$$Q(P) = 1000 - P$$

Respuesta:
Calculamos primero dQ/dP:

$$Q(P) = 1000 - P$$

$$\frac{dQ}{dP} = -1$$

Calculamos la función P/Q:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{1000 - P}$$

Por lo tanto:

$$\epsilon_d = \frac{P}{1000 - P}(-1) = \frac{-P}{1000 - P}$$

O, equivalentemente,

$$\epsilon_d = \frac{P}{P - 1000}$$

4.2.6. Diferenciales para calcular volúmenes

Una pared tiene $3\ m$ de alto y $4\ m$ de ancho. Tiene adherida una lámina de madera de $3\ mm$ de espesor. ¿Qué volumen ocupa la madera?

4.2.6.1. Ejemplo, diferencial de volumen:

$$V = A \times \Delta z$$

El volumen de madera será el área de la pared, A, multiplicada por el espesor de la madera, Δz.

Se puede pensar como una diferencial. Sea L el ancho y M el alto, entonces:

$$V = LMz$$
$$dV = \frac{dV}{dz}dz$$

Este procedimiento se puede usar para cualquier forma de la superficie.

4.2.6.2. Ejemplo, incertidumbre en el área y volumen de una esfera: la circunferencia de una esfera mide $84\ cm$, con una incertidumbre de 0.5 cm.

- Use diferenciales para estimar la incertidumbre relativa del área superficial.
- Use diferenciales para estimar la incertidumbre porcentual del volumen.

Ayuda: recuerde que la circunferencia (longitud del ecuador) de una esfera, se relaciona con su radio según:

$$C(r) = 2\pi r$$

Además, el área de una circunferencia es:

$$A(r) = 4\pi r^2$$

Medimos: $C = 84\ cm$ con incertidumbre $dC = 0.5\ cm$. Luego usemos C como variable:

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

$$A(C) = 4\pi \left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = 4\pi \frac{C^2}{4\pi^2}$$

$$A(C) = \frac{1}{\pi}C^2$$

$$\frac{dA}{dC} = \frac{2}{\pi}C$$

$$dA = \frac{dA}{dC}dC$$

$$dA = \frac{2}{\pi}CdC$$

$$dA = \frac{2}{\pi}(84cm)0.5cm \approx 26.74\ cm^2$$

La incertidumbre en el área es aproximadamente $26.74\ cm^2$.

También se puede calcular la incertidumbre del área usando r como variable. Entonces tenemos:

$$dA = \frac{dA}{dr}dr$$

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

Pero todavía no podemos usar esta ecuación, porque no tenemos dr.

Usando la definición de circunferencia, tenemos: $r = \frac{C}{2\pi}$ $\frac{dr}{dC} = \frac{1}{2\pi}$

$$dr = \frac{dr}{dC} dC$$
$$dr = \frac{1}{2\pi} dC = \frac{1}{2\pi} 0.5cm$$

Volviendo a la ecuación sobre dA usando dr:

$$dA = \frac{dA}{dr} \frac{1}{2\pi} 0.5cm$$
$$dA = 8\pi \frac{C}{2\pi} \frac{84cm}{2\pi} 0.5cm$$
$$dA = 84cm \frac{1}{\pi} cm^2 \approx 26.74cm^2$$

Para la incertidumbre relativa:

$$A = 4\pi r^2$$
$$A = 4\pi \left(\frac{C}{2\pi}\right) = \frac{C^2}{\pi} = 2246cm^2$$
$$\frac{dA}{A} \approx \frac{26.74}{2246} = 0.012$$

Ejercicios y tareas

4.2.6.3. • *Tarea, linealización:* para cada una de las siguientes funciones, encuentre la linealización $L(x)$ de f en a:

a. $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$

b. $f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{2}$

c. $f(x) = 1 + \ln(1 + x), a = 0$

4.2.6.4. • *Tarea, linealización:* la gráfica de una función f está representada en la figura 4.33. Suponga que L es la linealización local de f en las cercanías de $a = 3$.

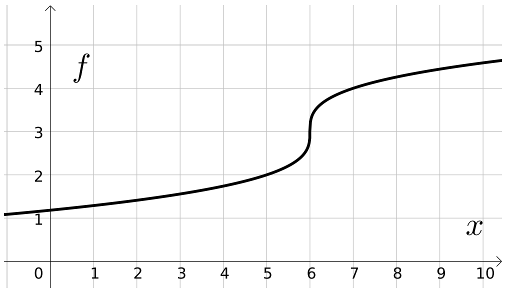


Figura 4.33. Ejercicio 4.2.6.4, linealización

1. Dado que $f'(a) \approx 0.16$ y $f(a) = 1.56$, encuentre una expresión para $L(x)$.
2. Use su respuesta del enunciado anterior para aproximar $f(2)$.
3. Su función L está representada en la siguiente gráfica:

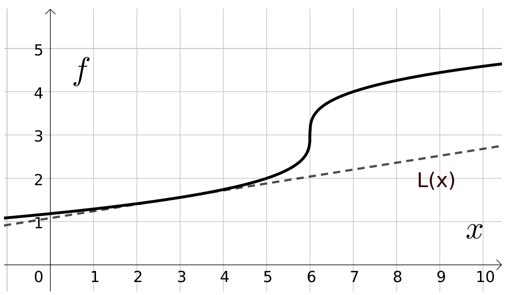
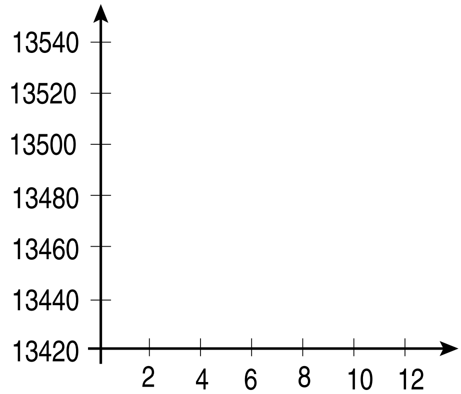


Figura 4.34. Linealización, ejercicio 4.2.6.4

La función L es una mejor aproximación de f para $x = 2$ o para $x = 5$? Explique.

4.2.6.5. ★ *Tarea, aproximación lineal:* el índice "Dow Jones" es un promedio de los valores de las acciones de 30 compañías. Los precios de las acciones pueden variar en fracciones de segundo, por lo tanto el valor del Dow Jones también es una función del tiempo.

El 27 de septiembre de 2012, a las 11:30 de la mañana el Dow Jones valía 13420 puntos. A la 1:30 de la tarde valía 13520 puntos.



A. Encuentre la función $L(t)$, que es la aproximación lineal al precio del Dow Jones, cercana a las 11:30.

B. Usando $L(t)$, estime el valor del Dow Jones al medio día.

C. Usando solo esa función $L(t)$, estime el tiempo necesario para que el valor del "Dow Jones" se duplique.

D. Marque los dos puntos en el gráfico. Trace una recta con regla. (Tenga cuidado en los ejes.)

E. Usando la gráfica, estime el valor del Dow Jones al medio día.

F. Compare su respuesta B. y E. ¿Cuál valor es una mejor aproximación? Explique.

4.2.6.6. ★ *Tarea, linealización:* para cada una de las siguientes funciones, encuentre la linealización $L(x)$ de f en a:

a. $f(x) = \frac{x}{x+1}, a = 2$

b. $f(x) = x \ln x, a = 5$

c. $f(x) = e^x \cos x, a = 0$

4.2.6.7. • *Tarea, aproximaciones:*

a. Queremos utilizar la *linealización* para *aproximar* el valor de la siguiente operación:

$$(1.01)^6$$

  a. ¿Qué función está relacionada con la operación $(1.01)^6$? (Esta es la función f que necesitamos para la linealización.)

b. Para la *linealización* necesitamos también un valor de a. Es un número que está cerca a 1.01, y donde es fácil evaluar la función. ¿Cuál es el número?

c. Usando el valor de a y la función f, encuentre la linealización L. Evalúela en 1.01. El resultado debe ser cercano a $1.01^6 = 1.061520150601$.

b. Siga el mismo procedimiento del numeral anterior para explicar si $\sec 0.08 \approx 1$.

4.2.6.8. ★ *Tarea, aproximación:* aproxime el cálculo numérico, usando linealización:

a. $\sqrt[3]{1001}$ b. $\frac{1}{4.002}$

4.2.6.9. Ejercicio, linealización dada la gráfica de f': sobre la función f sabemos que $f(1) = 4$, y tenemos la gráfica de su derivada, la figura 4.35.

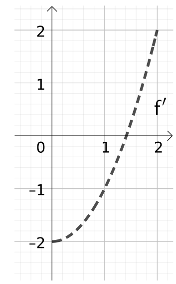


Figura 4.35. Representación de una derivada f', para el ejercicio 4.2.6.9

a. Usando una aproximación lineal, estime el valor de f en 1.4 mediante la aproximación, es decir $f(1.4) \approx L(1.4)$.

b. ¿Usted espera que su aproximación sea mayor al valor real, es decir que $L(1.4) > f(1.4)$, o por el contrario que sea menor al valor real, es decir $L(1.4) < f(1.4)$?

c. El valor funcional se aproximó usando un paso de 0.4. En su lugar podríamos haberlo hecho de la siguiente manera:

I Usando los valores de $f(1)$ y $f'(1)$, construir la aproximación, llamémosla L_1. Hallar el valor aproximado de $f(1.2)$, usando la linealización L_1 en 1.2.

II Usando el valor aproximado $f(1.2) \approx L(1.2)$ y el valor de la derivada $f'(1.2)$, construir una nueva aproximación lineal en las cercanías de $a = 1.2$, llamémosla L_2. Entonces $f(1.4) = L_2(1.4)$.

III ¿El valor que obtiene es mayor o menor a $L(1.4)$?, ¿cuál procedimiento da una mejor aproximación?

4.2.6.10. Ejercicio, derivada por tabla: sobre la función f sabemos que $f(0) = 2$, y tenemos la tabla 4.1 con valores de su derivada. No sabemos el valor de la función en 1, pero queremos usar la información que tenemos para aproximar ese valor.

x	f'(x)
0	1
0.2	0.8
0.4	0.5
0.6	0.3
0.8	0.1

Tabla 4.1. Datos del ejercicio 4.2.6.10

a. Halle la aproximación lineal de f en 0. Llamémosla L_0. Con esa aproximación encuentre un valor $L_0(1.)$. Esta es una primera aproximación para $f(1)$.

b. Usando $L_0(x)$, encuentre un valor $L_0(0.2)$. Este número es la aproximación de $f(0.2)$. Usando este valor y la derivada $f'(0.2)$, construya una segunda aproximación $L_2(x)$. Use esta aproximación para hallar $L_2(1)$. Esta es su segunda aproximación para f(1).

c. Usando $L_2(x)$, encuentre un valor $L_0(0.6)$, que es su aproximación para $f(0.6)$. Con ese valor y $f'(0.6)$, halle una aproximación lineal $L_3(x)$, y de allí el valor $L_3(1)$, su tercera aproximación para $f(1)$.

d. Usando $L_3(x)$, encuentre un valor $L_0(0.8)$, que es su aproximación para $f(0.8)$. Con ese valor y $f'(0.8)$, halle una aproximación lineal $L_4(x)$, y de allí el valor $L_4(1)$, su cuarta aproximación para $f(1)$.

e. ¿Cuál de sus aproximaciones para $f(1)$ será mejor?

4.2.6.11. • *Tarea, diferenciales:* sea V el volumen de un cubo de lado x:

$$V(x) = x^3 \;\; ; \;\; x > 0$$

Calcule:

a. El diferencial de volumen dV para cualquier lado x.

b. El valor del diferencial, para cualquier x, en términos del área.

c. El valor del diferencial dV cuando $x = 3$mm.

Respuesta en la nota al pie: [4]

4.2.6.12. ★ *Tarea, diferenciales:* encuentre el diferencial dy y evalúelo para los valores dados de x y dx:

a. $f(x) = e^{x/5}$, $x = 0$, $dx = 0.1$

b. $f(x) = \cos(\pi x)$, $x = \pi/3$, $dx = 0.05$

c. $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $x = 1$, $dx = 0.2$

[4] Por definición de diferencial, tenemos: $dV = \frac{dV}{dx}dx = 3x^2 dx$ es el diferencial de volumen para cualquier valor de x. Para escribirlo en términos del área es necesario hacer el cambio de variable, ya no sería $V(x)$, si no $V(A)$. El área de un cubo es seis veces el área de sus lados: $A_{\text{cubo}} = 6x^2$, despejando obtenemos: $x = \left(\frac{A_{\text{cubo}}}{6}\right)^{1/2}$. Entonces $V(A) = \left(\frac{A_{\text{cubo}}}{6}\right)^{3/2}$. El diferencial será: $dV = \frac{dV}{dA}dA = \frac{3}{2}\frac{A^{1/2}}{6^{3/2}}dA$. Si $x = 3mm$, entonces $dV = 3(0.003m)^2 dx = 27 \times 10^{-6} m^2 dx = 27(10^{-3}m)^2 dx = 27mm^2 dx$.

4.2.6.13. • *Tarea, diferenciales:* encuentre el diferencial df y evalúelo para los valores dados de x y dx:

a. $f(x) = \sqrt{3+x^2}$, $x = 1$, $dx = 0.1$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x = 2$, $dx = 0.05$

4.2.6.14. • *Tarea, diferenciales:* utilice las diferenciales para estimar la incertidumbre en los siguientes problemas:

a. Se midió la arista de un cubo en $30\ cm$, con una incertidumbre de 0.1 cm. ¿Cuál es la incertidumbre del volumen? ¿Cuál es la incertidumbre relativa?

b. Se midió el radio de una esfera, $20\pi\ cm$, con una incertidumbre de 0.1 cm. ¿Cuál es la incertidumbre del volumen? ¿Cuál es la incertidumbre relativa del volumen?

c. Un triángulo rectángulo tiene una longitud de un lado en $20\ cm$. Si se mide el ángulo adyacente en $\pi/3$, con una incertidumbre de 0.1, ¿cuál es la incertidumbre de la medición de la hipotenusa? ¿Cuál es la incertidumbre porcentual del valor de la hipotenusa?

4.2.6.15. ★ *Tarea, diferenciales:* sea A el área de un cuadrado de lado x:

$$A(x) = x^2$$

Calcule:

a. El diferencial de área dA para cualquier lado x.

b. El valor del diferencial dA cuando $x =$ 15mm.

4.2.6.16. ★ *Tarea, diferenciales:* la densidad lineal λ, superficial σ y volumétrica ρ se definen según se muestra en la tabla 4.2.
Donde A es el área y V el volumen. La masa de una varilla varía como función de la distancia al extremo izquierdo según la siguiente fórmula:

$$m(x) = 8x^2\ \ kg$$

Donde m está en kg, y x en m. (Por ejemplo, en el extremo izquierdo $x = 0$).

a. Calcule la función $\lambda(x)$.

Nombre	Definición
Lineal	$\lambda = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$
Superficial	$\sigma = \lim\limits_{\Delta A\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA}$
Volumétrica	$\rho = \lim\limits_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$

Tabla 4.2. Definiciones de densidad lineal, superficial y volumétrica

b. La varilla mide $3\ m$. Calcule la densidad a un centímetro del extremo izquierdo, $1\ cm$, $2\ m$ del extremo izquierdo, y $2.99\ m$ del extremo izquierdo.

c. ¿Dónde es más alta la densidad? ¿Dónde más baja?

4.2.6.17. ★ *Tarea, incertidumbre:* utilice las diferenciales para estimar la incertidumbre en los siguientes problemas:

a. Se midió la distancia a través del ecuador de una esfera, $20\pi\ cm$, con una incertidumbre de 0.1 cm. ¿Cuál es la incertidumbre del área? ¿Cuál es la incertidumbre relativa del área?

b. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para pintar un domo semiesférico de radio $50\ m$ con una capa de $5\ mm$ de espesor.

4.2.6.18. ★ *Tarea, aproximaciones:* aproxime el cálculo numérico, usando linealización:

a. $(1.999)^4$

b. $e^{-0.001}$

4.2.6.19. *Ejercicio, costos y demanda:* si un bien tiene función de demanda $Q(P)$, y tiene un precio P, la elasticidad de la demanda se puede calcular como:

$$\epsilon_d = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$$

Si la función de demanda es:

$$Q(P) = 100 - 2P$$

¿Cuál de las siguientes expresiones es *falsa*?

A. La elasticidad de la demanda, cuando el $P = 1$, es $\epsilon_d = -\frac{1}{49}$

B. La elasticidad de la demanda, para cualquier P, es $\frac{P}{Q} = \frac{P}{P-50}$

C. La elasticidad de la demanda, para cualquier P, es $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{2P-100}$

D. La elasticidad de la demanda, cuando el $P = 3$, es $\epsilon_d = -\frac{3}{47}$

E. La elasticidad de la demanda se puede escribir como $\epsilon_d = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}}$

F. La elasticidad de la demanda, para cualquier P, es $\frac{P}{Q} = \frac{-2P}{100-2P}$

4.3. Modelado mediante diferenciales y razones de cambio en economía

4.3.1. Modelado matemático

En general los modelos son idealizaciones que sirven para comprender mejor el mundo y la naturaleza. Si yo le pidiera describir a un gran amigo, usted comenzará con categorías generales: el género, la edad, el carácter. De la misma manera, los modelos matemáticos son idealizaciones que representan las características generales de un sistema.

En este caso hablaremos de sistemas de dos variables, llamémoslas x y y; que serán la variable independiente y la variable dependiente. Los modelos matemáticos nos servirán para explicar o predecir el comportamiento de la variable dependiente del sistema.

4.3.2. Modelos lineales

Si la relación entre x y y es de proporcionalidad, el modelo matemático es un modelo lineal.

4.3.2.1. *Definición, proporcionalidad:* dos variables x, y, son proporcionales si la y es siempre un múltiplo constante de x:

$$y = kx$$

Con k una constante (que no es cero). Se dice $y \propto x$.

4.3.2.2. *Definición, modelo lineal:* si, en un sistema de dos variables, se cumple que:

- y es proporcional a x
- o, equivalentemente, $\frac{d}{dx}y = k$, la derivada de y es una constante,

Entonces el modelo que relaciona las variables es el modelo lineal.

$$y = kx + a$$

con k y a constantes.

4.3.2.3. Ejemplo, fuerza de un resorte: un resorte cuelga de un punto de apoyo, en su extremo hay un soporte en el que se puede cambiar la masa.

Por ejemplo, la fuerza F ejercida por un resorte que se ha estirado una distancia x sigue la relación lineal $F = kx$, la fuerza es proporcional a la elongación del resorte (la distancia que se ha estirado).

4.3.3. Modelo cuadrático

4.3.3.1. Definición, modelo cuadrático: si, en un sistema de dos variables, se cumple que:

- La relación entre x y y es un polinomio de grado 2:

  $$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

  donde a_2,a_1, y a_0 son constantes.

- o, equivalentemente, $\frac{d}{dx}y = a_1 + xa_2$, la derivada de y es una recta
- o, equivalentemente, $\frac{d^2}{dx^2}y = a_2$, la segunda derivada de y es una constante

entonces el modelo que relaciona las variables es un modelo cuadrático

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde a_2,a_1, y a_0 son constantes.

4.3.3.2. Definición, cinemática: el modelo que representa el movimiento de un objeto con aceleración constante es cuadrático en el tiempo:

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{at^2}{2}$$

$x(0)$ es la posición inicial, $v(0)$ la velocidad inicial, y a la aceleración. La velocidad es la derivada de esta relación:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v(0) + at$$

4.3.3.3. Ejemplo, aceleración constante: una moneda se deja caer desde una torre. ¿Cuál es el modelo matemático que predice la posición de la piedra como función del tiempo? Si la segunda derivada de y con respecto a la variable x es constante, el modelo que representa la relación entre las variables es un modelo cuadrático. El movimiento de la piedra sigue la ecuación:

$$\frac{d^2}{dt^2}z = g$$

La aceleración de la piedra es constante y vale $g \approx -9.8m/s^2$. Se trata de un modelo cuadrático en el tiempo. La posición de la piedra viene dada por:

$$z(t) = z(0) - 9.8t^2$$

Donde $z(0)$ es una constante, la altura inicial de la piedra.

4.3.4. Modelo exponencial continuo

4.3.4.1. Definición, modelo exponencial continuo: si, en un sistema de dos variables, se cumple que:

- La relación entre y y t es la función exponencial

  $$y(t) = Ae^{\frac{t}{T}}$$

  donde son constantes A, la amplitud; T, la vida media.

- o, equivalentemente, $\frac{d}{dt}y = \frac{y}{T}$, la derivada de y es igual a y dividido por la vida media,

entonces el modelo que relaciona las variables es un modelo exponencial:

$$y(t) = Ae^{\frac{t}{T}}$$

donde son constantes A, la amplitud; T, la vida media.

4.3.4.2. Ejemplo, decrecimiento exponencial: descarga de un condensador: la carga de un condensador es función del tiempo. $Q = Q(t)$. Q es la variable dependiente t la variable independiente. Si inicialmente la carga tiene un valor Q_0, y la derivada temporal de la carga dQ/dt es igual a la carga multiplicada por -2, ¿qué modelo matemático describe la carga en el condensador?

$$\frac{dQ}{dt} = -2Q$$

Como la variación de la carga es proporcional a la carga, el modelo es exponencial continuo.

$$Q(t) = Q_0 e^{-2t}$$

La vida media en este caso es $T = 1/2$.

4.3.5. Modelo exponencial discreto

4.3.5.1. Definición, modelo exponencial discreto: en estos modelos tenemos que:

- La variable independiente es un número entero. x es la variable independiente, y la variable dependiente. Entonces los valores de x son: $0, 1, 2...$, y cuando $x = 0$, entonces el valor de y se denota por y_0; cuando $x = 1$, por y_1, y así sucesivamente.
- La variable dependiente en el valor x es proporcional a la variable dependiente en un valor anterior. Es decir: $y_x = ky_{x-1}$. Tenga en cuenta que el valor de la variable independiente no necesariamente es exactamente el valor anterior, por ejemplo puede ser que $y_x = ky_{x-T}$.

Entonces el modelo que relaciona las variables es un modelo exponencial discreto. La base del modelo es la constante de proporcionalidad k:

$$y(x) = y_0(k)^{x/T}$$

4.3.5.2. Ejemplo, crecimiento poblacional: una población de bacterias crece muy rápidamente: se duplica su cantidad cada hora. Sea $N(t)$ el número de bacterias en el tiempo t. Las unidades de N son "número de bacterias" y las unidades de t son, horas, h. ¿Cuál es la forma funcional de $N(t)$?

Solución: si la población inicial es de 10^6 bacterias, entonces:

$$N(0) = 10^6$$

$$N(1) = 2N(0) = 2 \times 10^6$$

$$N(2) = 2N(1) = 4 \times 10^6$$

$$N(3) = 2N(2) = 8 \times 10^6$$

En términos de la población inicial los datos se reflejan en la tabla 4.3. Como la población en la hora t es el doble de la población en la hora $t-1$, entonces la constante $k = 2$ ("...se duplica"), y el periodo es $T = 1$ ("... cada hora"). La función que representa ese comportamiento es una función exponencial: $N(t) = 2^t N_0 \quad t \geq 0$.

t	$N(t)$	$N(N_0)$
0	10^6	N_0
1	2×10^6	$2 \times N_0$
2	4×10^6	$4 \times N_0$
3	8×10^6	$8 \times N_0$
4	16×10^6	$16 \times N_0$

Tabla 4.3. Datos correspondientes a un modelo exponencial discreto

El modelo da el valor exacto de la población para valores de t discretos, $t \in \mathcal{N}$. Pero se puede pensar que es también una buena aproximación fracciones de t, (por ejemplo puede servir para estimar cuántas bacterias había a la media hora, o después de dos horas y cuarto).

Cuando el resultado del modelo es un número no entero, se debe aproximar al entero más cercano (no tiene sentido hablar de una población de tres bacterias y media).

4.3.5.3. Ejemplo, crecimiento poblacional: ¿cuál es la función que representa la tasa de crecimiento poblacional para cualquier valor de t? ¿A qué tasa crece la población de bacterias a las 4 h?

La tasa a la que crece la población es la derivada con respecto al tiempo de la función N. Entonces:

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt}\left(2^t N_0\right)$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = N_0 \frac{d}{dt}2^t$$

$$\frac{d}{dt}N(t) = N_0 2^t \ln(2)$$

La tasa a la que crece la población en cualquier momento es de $N_0 \ln(2) 2^t$.

A las $4\ h$, la tasa de cambio será de:

$$\left.\frac{d}{dt}N(t)\right|_{t=4} = N_0 2^4 \ln(2) \approx 11090354 \frac{b}{h}$$

Aproximadamente 11 millones de bacterias por hora.

4.3.6. Modelos sinusoidales

En este curso y los anteriores hemos hablado sobre las funciones sinusoidales $\sin x$ y $\cos x$. Son funciones periódicas, continuas, diferenciables.

4.3.6.1. Definición, modelo sinusoidal: si, en un sistema de dos variables, se cumple que:

- La relación entre x y y es la función seno:

$$y(x) = A \sin(\omega x + \delta)$$

  Donde son constantes A, la amplitud; ω, la frecuencia; y δ, la fase.

- o, equivalentemente, $\frac{d^2}{dx^2} y = -\omega^2 y$, la segunda derivada de y es igual a $-y$ multiplicado por la frecuencia al cuadrado,

entonces el modelo que relaciona las variables es un modelo sinusoidal:

$$y(x) = A \sin(\omega x + \delta)$$

donde son constantes A, la amplitud; ω, la frecuencia; y δ, la fase.

4.3.6.2. Ejemplo, posición de una masa en un resorte: habíamos dicho que un resorte hace una fuerza $F = kx$. ¿Cuál es el modelo para la *posición* de la masa? En este caso tenemos:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

El modelo es sinusoidal. La posición de la masa será:

$$x(t) = x(0) \sin\left(\sqrt{k} t\right)$$

4.3.7. Los mundiales de atletismo de 2009

¿Cómo se ganan los 100 m planos? Hasta hace poco se pensaba que solo lo podían hacer atletas de baja estatura, de mucha musculatura; características que les permite ser explosivos en el arranque y mantener la velocidad hasta el final. Hasta que un jamaicano demasiado alto, demasiado delgado, lograra romper todos los récords y dejar a todos sus competidores con la boca abierta, sin aire, y a varios metros detrás del ganador. ¿Cómo se ganan los $100\ m$ planos? Usain Bolt no era particularmente explosivo, pero lograba recortar la distancia perdida y salir adelante de sus competidores. Contra lo que dijese Zenón, al final este Aquiles sí rebasa a la tortuga. Y de qué manera.

La figura 4.36 muestra la posición de Bolt en la carrera como función del tiempo [5].

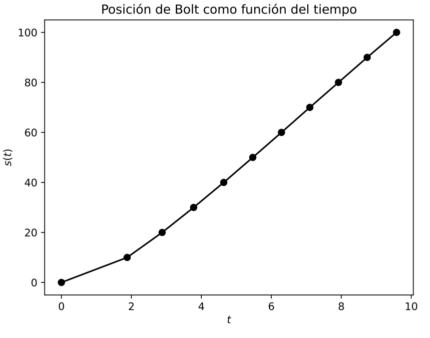


Figura 4.36. Posición de Bolt como función del tiempo

En la figura 4.37 vemos la velocidad promedio de Bolt en los intervalos definidos por los instantes en los cuales se midió su posición.

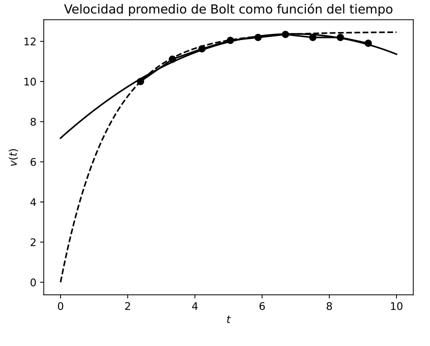


Figura 4.37. Velocidad de Bolt como función del tiempo

[5] Datos tomados de: http://www.meathathletics.ie/devathletes/pdf/Biomechanics%20of%20Sprints.pdf

La línea punteada corresponde a un modelo exponencial, un poco diferente del que vimos en esta sección. $v = v_{max}(1 - e^{-t/\tau})$ (este modelo se usa en el proceso de carga de un condensador). La línea continua corresponde a un modelo cuadrático.

Steven Strogatz habla sobre esta carrera en su libro *Infinite Powers* (S. Strogatz, 2019). El primer capítulo está disponible legalmente en el siguiente enlace: https://www.quantamagazine.org/infinite-powers-usain-bolt-and-the-art-of-calculus-20190403/. Por ahora, únicamente en inglés.

4.3.8. Razón de cambio en ciencias económicas

4.3.8.1. Definición, función costo: una empresa produce x unidades de cierto artículo. Hay costos que no dependen del número de artículos (costos fijos, como el arriendo) y otros que sí dependen del número de artículos (costos variables, como el costo de las materias primas).
Sea C la función de costo, que expresa los costos totales de la empresa. C está en miles de pesos, y x en número de artículos.

4.3.8.2. Ejemplo, costo del artículo 327: si una empresa tiene función de costos $C(x)$, entonces producir 326 artículos le cuesta $C(326)$. Producir 327 le costará: $C(327)$. ¿Cuánto fue el costo de producir el artículo 327?

$$C(327) - C(326)$$

En general, al producir x artículos, el costo del artículo $x + 1$ es: $C(x + 1) - C(x)$

4.3.8.3. Definición, razón de cambio promedio del costo con respecto al número de unidades: sea C la función de costos de una empresa, que depende únicamente del número de unidades producidas x. La razón de cambio promedio del costo, cuando se pasa de producir x_1 unidades a cuando se producen x_2 será:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{4.14}$$

4.3.8.4. Definición, costo marginal: la función de costos de cierta empresa depende únicamente del número de unidades producidas: $C = C(x)$. El costo de producir un artículo adicional, cuando se está produciendo algún número de artículos x_0, $C(x+1) - C(x) = \Delta x$. Como se trata de un único artículo adicional, entonces $\Delta x = 1$, entonces el costo de ese artículo original se relaciona con la tasa de cambio promedio entre x y $x+1$ artículos:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\Delta C}{\Delta x}\right|_{\Delta x=1, x=x_0} &= \frac{C(x_0+1)-C(x_0)}{(x_0+1)-x_0} \\ &= C(x_0+1)-C(x_0) \end{aligned} \tag{4.15}$$

El costo marginal se define como la derivada de la función costos con respecto al número de artículos, y aproxima el costo de la unidad $x+1$:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC(x)}{dx} \approx \left.\frac{\Delta C}{\Delta x}\right|_{\Delta x=1}$$

4.3.8.5. Ejemplo, costo marginal: el costo de producir cierto artículo está dado por la función: $C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2 \;\; ; \; x > 0$, donde C está en miles de pesos y x está en unidades.
¿Cuál es la función de costo marginal?

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

¿Cuál es el costo marginal al producir 500 artículos?

$$C'|_{x=500} = 5 + 0.02 * 500 = 15 \frac{\text{mil pesos}}{articulo}$$

El valor exacto del costo de la unidad 501 es

$$C(501) - C(500) = 15.05$$

Ejercicios y tareas

4.3.8.6. Ejercicio, modelo de costos y costo marginal: una empresa tiene la siguiente estructura de costos:

- Arriendo: 25 millones de pesos
- Costos de manufactura: 13 mil 250 pesos por artículo
- Costos de material: 8 mil 200 por el número de artículos al cuadrado

¿Cuál es la función de costos de la empresa? $C(x)$, con C en miles de pesos y x el número de unidades producidas.

A. $C(x) = (25000 + 13.250 + 8.200)x = 25021.45x$

B. $C(x) = 25000x + 13.250x + 8.200x^2 = 25013.25x + 8.2x^2$

C. $C(x) = 25000 + 13.250 + 8.200 = 25021.45$

D. $C(x) = 25000 + 13.250x + 8.200x^2$

¿Cuál es la función $\frac{dC}{dx}$, que aproxima el costo marginal? Usando esa aproximación, estime el costo marginal cuando se producen 800 unidades.

A. 5283600 miles de pesos.

B. 5296741 miles de pesos.

C. 38133.25 miles de pesos/unidad.

D. 13133.25 miles de pesos/unidad.

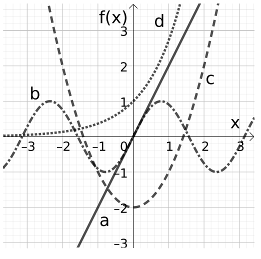


Figura 4.38. Ejercicio 4.3.8.8, modelos lineal, cuadrático, sinusoidal y exponencial

4.3.8.7. *Ejercicio, modelo sinusoidal:* corresponde a un modelo sinusoidal:

a $\frac{d^2}{dx^2}y = -\omega^2 y$

c $\frac{d^2}{dx^2}y = 0$

b $\frac{d}{dt}y = \frac{y}{T}$

d $\frac{d}{dx}y = 0$

4.3.8.8. • *Tarea, hallar el modelo:* las gráficas mostradas en la figura 4.38 representan un modelo lineal, uno cuadrático, sinusoidal y exponencial. ¿Cuál es cada uno?
El modelo Cuadrático es: ....
El modelo Lineal es: ....
El modelo Exponencial es: ....
El modelo Sinusoidal es: ....

4.3.8.9. • *Tarea, hallar el modelo:* la figura 4.39 representa la derivada (tasa de cambio instantánea) de dos modelos. ¿Cuáles son los modelos?

Según la gráfica (a), la relación entre $y = f(x)$ y x es un modelo:...................
Según la gráfica (b), la relación entre $y = f(x)$ y x es un modelo:...................
Respuesta en la nota al pie: [6]

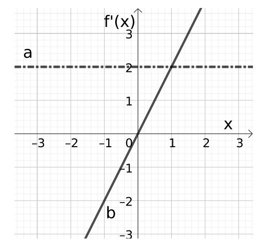


Figura 4.39. Ejercicio 4.3.8.9, dos modelos

4.3.8.10. Ejercicio, hallar el modelo: la figura 4.40 representa la derivada (tasa de cambio instantánea) de dos modelos. ¿Cuáles son los modelos? Según la gráfica (a), la relación entre $y = f(x)$ y x es un modelo:...................
Según la gráfica (b), la relación entre $y = f(x)$ y x es un modelo:...................

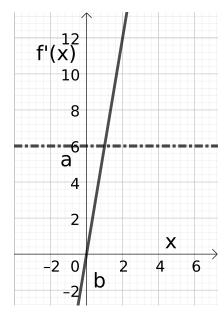


Figura 4.40. Ejercicio 4.3.8.10, derivada de dos modelos

4.3.8.11. • Tarea, hallar el modelo: la figura 4.41 representa la velocidad $v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$ de un objeto.

a. ¿Qué tipo de modelo (lineal, cuadrático, exponencial, sinusoidal) relaciona la posición del objeto con el tiempo?

b. ¿Cuál es el valor de la aceleración del objeto?

c. Si la posición inicial es 0, ¿cuál es el modelo que representa la posición del objeto para $t \in [0, 2)$?

4.3.8.12. Ejercicio, hallar el modelo: la figura 4.42 representa la velocidad $v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$ de un objeto.

a. ¿Qué tipo de modelo (lineal, cuadrático, exponencial, sinusoidal) relaciona la posición del objeto con el tiempo?

b. ¿Cuál es el valor de la aceleración del objeto?

c. Si la posición inicial es 0, ¿cuál es el modelo que representa la posición del objeto para $t \in [0, 3)$?

4.3.8.13. • Tarea, hallar el modelo: se mide la velocidad de un tren, desde que parte de la estación, y se obtiene la siguiente relación: $v = \frac{dx}{dt} = 0.8t \, \frac{m}{s^2}$ Donde x es la distancia desde la estación, t el tiempo desde que partió de la estación, v la función velocidad instantánea del tren. Responda:

[6] En el modelo lineal la derivada es constante, luego la gráfica (a) corresponde a un modelo lineal. En el modelo cuadrático la derivada es lineal, luego la gráfica que representa la derivada del modelo cuadrático es (b).

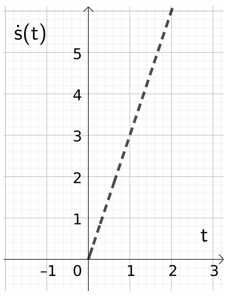


Figura 4.41. Ejercicio 4.3.8.11, modelos de derivada

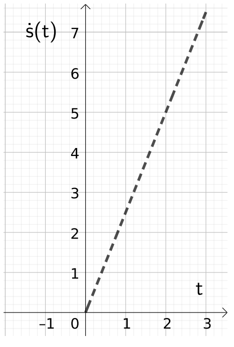


Figura 4.42. Ejercicio 4.3.8.12, velocidad de un objeto

a. ¿Qué tipo de modelo representa la relación entre *la posición* x y el tiempo t?

b. ¿Cuál es el valor de la aceleración?

c. Escriba el modelo que relaciona la posición como función del tiempo. Tenga en cuenta que $x(0) = 0$.

4.3.8.14. Ejercicio, hallar el modelo: se mide la velocidad de un tren, desde que parte de la estación. Se encuentra que su aceleración es de $2m/s^2$. Llamemos x la distancia desde la estación, t el tiempo desde que partió de la estación, v la función velocidad instantánea del tren. Responda:

a. ¿Qué tipo de modelo representa la relación entre *la posición* x y el tiempo t?

b. Escriba la ecuación para $v(t)$.

c. Escriba el modelo que relaciona la posición como función del tiempo. Tenga en cuenta que $x(0) = 0$.

4.3.8.15. ★ *Tarea, hallar el modelo:* se mide la velocidad de un tren, desde que parte de la estación. Se encuentra que su aceleración es de $1m/s^2$. Llamemos x la distancia desde la estación, t el tiempo desde que partió de la estación, v la función velocidad instantánea del tren. Responda:

a. ¿Qué tipo de modelo representa la relación entre *la posición* x y el tiempo t?

b. Escriba la ecuación para $v(t)$.

c. Escriba el modelo que relaciona la posición como función del tiempo. Tenga en cuenta que $x(0) = 0$.

4.3.8.16. ● *Tarea, modelos:* se tiene una enfermedad en la cual cada persona puede infectar a dos personas por día. Sea $N(t)$ el número de enfermos que hay en el día t desde que comienza la epidemia. Se puede decir que: $\Delta N(t) = 2N(t)$. El número inicial de enfermos es N_0.

a. ¿Cuál es el tipo de modelo que representa la relación entre el número de enfermos y el tiempo para esta enfermedad? (lineal, cuadrático, exponencial continuo, exponencial discreto, sinusoidal).

b. Llene la siguiente tabla:

t (tiempo, en días)	ΔN Nuevos enfermos, en términos de N_0	$N)$ Total enfermos, en términos de N_0
0	0	1
1		
2		
3		
4		

c. Escriba la función que representa la evolución del número de enfermos como función del tiempo.

d. Responda las mismas preguntas anteriores, si cada día se recupera la mitad de la población que estaba enferma el día anterior. Necesitará añadir la columna "Recuperados, en términos de N_0" a su tabla.

t (en días)	ΔN Nuevos enfermos, en términos de N_0	$N)$ Total recuperados, en términos de N_0	Total enfermos, en términos de N_0

4.3.8.17. • *Tarea, función costo:* el costo de producir cierto artículo está dado por la función: $C(x) = 8000 + 4x + 0.03x^2\ ;\ x > 0$ donde C está en miles de pesos y x está en unidades.

a. ¿Qué tipo de modelo relaciona el costo con el número de artículos?

b. ¿Cuál es la función de costo marginal?

c. ¿Cuál es el costo marginal, al producir 500 artículos?

d. ¿Cuál es el costo de la unidad 501?

4.3.8.18. • *Tarea, función costo:* el costo de producir cierto artículo está dado por la función: $C(x) = 7500 + 3x + 0.02x^2\ ;\ x > 0$. Donde C está en miles de pesos y x está en unidades:

a. ¿Qué tipo de modelo relaciona el costo con el número de artículos?

b. Organice las siguientes cantidades de mayor a menor:

   I El costo marginal de la unidad 10

   II El costo marginal de la unidad 100

   III El costo marginal de la unidad 500

   IV El costo promedio al producir 500 unidades

c. ¿Cuál es el costo de la unidad 501?

4.3.8.19. Ejercicio, función costo: el costo de producir cierto artículo está dado por la función: $C(x) = 3000 + 2x + 0.005x^2\ ;\ x > 0$. Donde C está en miles de pesos y x está en unidades:

a. ¿Qué tipo de modelo relaciona el costo con el número de artículos?

b. ¿Cuál es la función de costo marginal?

c. ¿Cuál es el costo marginal, al producir 500 artículos?

d. ¿Cuál es el costo de la unidad 501?

4.3.8.20. ★ *Tarea, modelos:* se tiene una enfermedad en la cual cada día, por cada 3 personas que estaban enfermas el día anterior se enferman 2 personas más. Además, cada día se recupera la mitad de los que estaban enfermos el día anterior. Supongamos que inicialmente, el día 0, hay 1000000 personas con la enfermedad.

1. ¿Cuál es el modelo matemático (ecuación) que representa la tasa de cambio del número de enfermos por día?
2. Llene la tabla 4.4.
3. Escriba la función que representa la evolución del número de enfermos como función del tiempo.
4. ¿El número de enfermos aumenta o disminuye? Si disminuye, ¿en cuánto tiempo se acaba la enfermedad?
5. Repita todo el ejercicio, pero ahora se mejoran 8 de cada 10.

4.3.8.21. ★ *Tarea, modelos:* el tamaño de una colonia de bacterias que se duplica cada hora sigue la ecuación:

$$N(t) = N_0 2^t$$

t (en días)	ΔN Nuevos enfermos, en términos de N_0	$N)$ Total recuperados, en términos de N_0	Total enfermos, en términos de N_0
0	0	1	
1			
2			
3			
4			

Tabla 4.4. Algunos valores del ejercicio 4.3.8.20

Donde t es el tiempo en horas, N_0 el tamaño inicial de la población.

Suponga que una segunda colonia de bacterias triplica su tamaño cada 45 minutos. El tamaño inicial de la colonia es de 137 bacterias.

a. Escriba la función $N(t)$ que describe el tamaño de la colonia de bacterias en cualquier tiempo t, con t en horas.

b. ¿Cuál es el tamaño de la población después de 2 días?

c. ¿Cuál es la tasa de cambio de la población como función del tiempo después de 2 días?

4.3.8.22. ★ *Tarea, función costo:* el costo en dólares de producir x metros de tela sigue la siguiente ecuación: $C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.0001x^3 \quad x > 0$

a. Calcule la función costo marginal, para cualquier x

b. Calcule $C'(100)$. Explique en palabras la interpretación de ese número.

c. Calcule la diferencia entre el costo del producto 101, y el costo del producto 100. ¿Cómo se compara con su respuesta del enunciado anterior?

d. Halle el nivel de producción que minimiza el costo marginal.

4.4. La derivada y los máximos y mínimos de las funciones

4.4.1. Máximos y mínimos

4.4.1.1. Definición, extremos relativos: la función f, que se muestra en la figura tiene diferentes extremos relativos:

- Máximos relativos: c,e,b
- Mínimos relativos: a,d,k

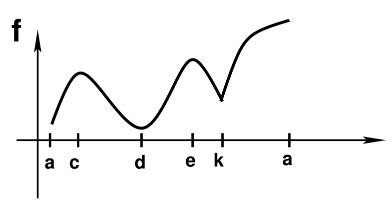


Figura 4.43. Función f con máximos relativos en c,e,b; y mínimos relativos en a,d,k

4.4.1.2. Definición, máximo relativo: un valor c es un máximo relativo de f si los valores que toma f en la vecindad de c son todos menores o iguales a $f(c)$.

4.4.1.3. Definición, mínimo relativo: un valor d es un mínimo relativo de f si los valores que toma f en la vecindad de d son todos mayores o iguales a $f(d)$.

4.4.1.4. Ejemplo, extremos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ si $-1 \leq x \leq 4$: la función está descrita por la figura 4.44.

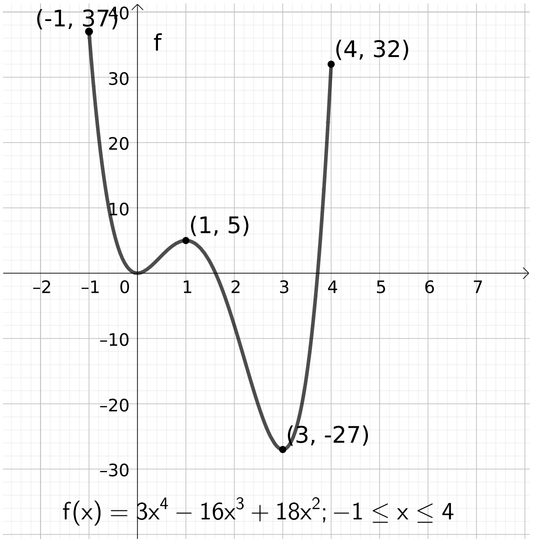


Figura 4.44. Extremos relativos de la función
$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \quad \text{con} \quad -1 \leq x \leq 4$

En x=4, hay un valor máximo relativo, considerando el intervalo cerrado como el subespacio de definición de la función.

4.4.1.5. Definición, extremos relativos: ¿cuáles son los candidatos a máximos y mínimos si la función está definida en un intervalo cerrado?

4.4.1.6. Definición, candidatos a extremos relativos: extremos de un intervalo: el intervalo cerrado $[a, b]$ tiene como extremo izquierdo a a y extremo derecho a b

4.4.1.7. Definición, candidatos a extremos relativos: valores críticos estacionarios: la función f tiene un valor estacionario en c, con c en su dominio, si $f'(c) = 0$.

4.4.1.8. Definición, candidatos a extremos relativos: valores singulares: la función f tiene un punto singular en c, con c en su dominio, si $f'(c)$ no está definida.

¿Es máximo o mínimo?
Se evalúa la función en el punto y en las vecindades.

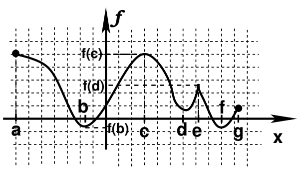


Figura 4.45. Candidatos a máximos y mínimos de la función f

4.4.1.9. Ejemplo, extremos relativos: tomemos, por ejemplo, la función representada por la figura 4.45. Los diferentes candidatos a máximos y mínimos, son:

- *Extremos del intervalo:* a, g
- *Valores críticos estacionarios:* b, c, d, f
- *Valor crítico singular:* e

4.4.1.10. Ejemplo, valor crítico estacionario: $f(x) = x^3 - 12x$:

- El dominio de f es $\mathbb{R}$.
- Como f es polinomial, es continua y diferenciable en todos los reales. No hay valores críticos singulares.
- Solo nos quedan posibles valores críticos estacionarios. La derivada es:
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
  Luego:
$$3x^2 = 12$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
  $x = \pm 2$. Calculamos $f(-2) = 16$, $f(2) = -16$. Los puntos estacionarios son: $(-2, 16)$ y $(2, -16)$

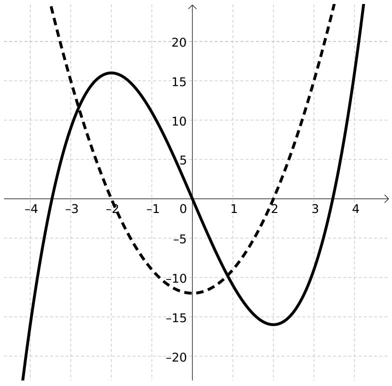


Figura 4.46. Función $f(x) = x^3 - 12x$, en línea continua; y su derivada $f'(x) = 3x^2 - 12$, en línea discontinua. Los ceros de la derivada corresponden a máximos o mínimos de la función

4.4.1.11. *Ejemplo, valor crítico singular: $f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}$:*

1. El dominio de f es $\mathbb{R}$.

2. La derivada de f es:

$$f'(x) = (x-1)^{-1/3}$$

   $f'(1)$ ¡no está definida! Entonces hay un valor crítico singular allí.

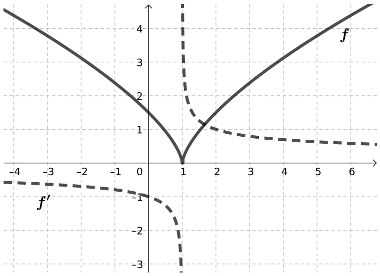


Figura 4.47. Función $f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}$, en línea continua; y su derivada $f'(x) = (x-1)^{-1/3}$, en línea discontinua. El límite de la derivada en 1 no existe, luego ese valor es un candidato a máximos o mínimos de la función. Según la gráfica corresponde a un mínimo

4.4.1.12. Ejemplo, valores extremos: sea $f(x) = 1/x$, con dominio $[1, \infty)$:

1. La función es continua en su dominio.
2. No hay valores críticos estacionarios.
3. 1 es candidato a máximo, por ser extremo del intervalo.

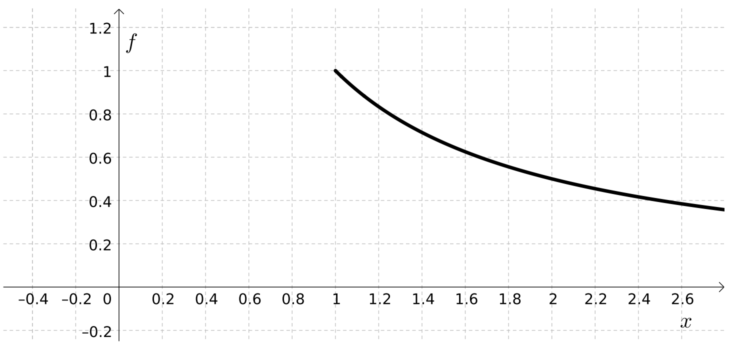


Figura 4.48. Función $f(x) = 1/x$, con dominio $[1, \infty)$

4.4.2. Criterio de la primera derivada

4.4.2.1. Definición, criterio de la primera derivada: tenemos una función f, que tiene un número crítico en c, y que es derivable en un intervalo que contiene a c (exceptuando, tal vez, en c). Entonces:

1. Si f' es positiva para $x < c$ y negativa para $x > c$, entonces es creciente para $x < c$ y decreciente para $x > c$. Luego en $x = c$, la función f tiene un máximo; el valor máximo es $f(c)$.

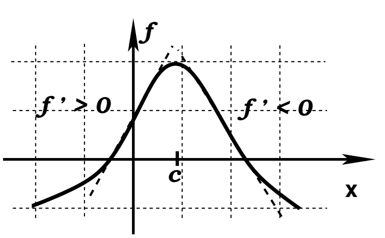


Figura 4.49. Ejemplo de un máximo local

2. Si f' es negativa para $x < c$ y positiva para $x > c$, entonces es decreciente para $x < c$ y creciente para $x > c$. Luego en $x = c$, la función f es un mínimo: el valor mínimo es $f(c)$.

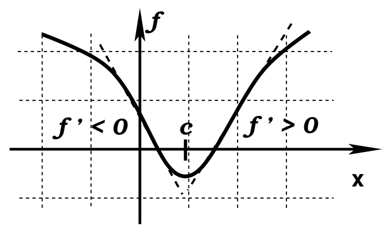


Figura 4.50. Ejemplo de un mínimo local

3. Si f' no cambia de signo en $x < c$, entonces $x = c$ no es máximo ni mínimo.

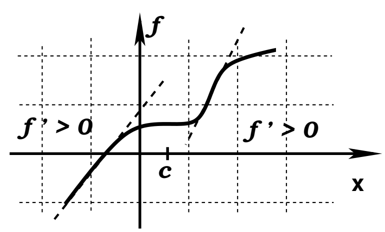


Figura 4.51. Valor crítico que no es máximo ni mínimo

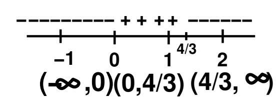


Figura 4.52. Diagrama de "cementerio" de la función $h(x) = 2 + 2x^2 - x^3$. Se representa sobre el eje x el signo $+$ para las regiones en los que la derivada es positiva, y con el signo $-$ en aquellas en que la derivada es negativa. Bajo el eje el texto da cuenta de los intervalos de monotonía

4.4.2.2. Ejemplo, intervalos de decrecimiento de $h(x) = 2 + 2x^2 - x^3$: la derivada de la función es:

$$h'(x) = 4x - 3x^2 \tag{4.16}$$
$$= x(4 - 3x) \tag{4.17}$$

Se hace cero en:

$$x = 0 \tag{4.18}$$
$$x = \frac{4}{3} \tag{4.19}$$

La función es monótona en los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 4/3)$, $(4/3, \infty)$. Para saber qué signo toma en el primer intervalo, se evalúa la derivada en cualquier punto de ese intervalo:

$$h'(-10) = -340$$

Por lo tanto, en todo ese intervalo la derivada es negativa. En el segundo:

$$h'(1) = 1$$

Por lo tanto, en todo ese intervalo la derivada es positiva. En el tercero:

$$h'(10) = 10(4 - 300) = -260$$

La representación de los valores positivos y negativos de la función está en la figura 4.52.

Ejercicios y tareas

4.4.2.3. ★ *Tarea, definiciones:* encierre en un círculo la palabra *falso*, si la proposición es falsa. Encierre en un círculo la palabra *verdadero* si la proposición es verdadera. No es necesario justificar.

Si la función f es continua en el intervalo abierto $(0, 100)$, entonces tiene siempre un máximo global y un mínimo global en el intervalo.

- *falso*
- *verdadero*

4.4.2.4. ★ *Tarea, definición:* determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique. Si es falsa, dé un contraejemplo.

Para todos los números a que sean valores críticos de la función f, se cumple que $f'(a) = 0$

4.4.2.5. • *Tarea, números críticos:* encuentre los números críticos de las siguientes funciones, sin usar CAS:

a. $f(x) = 4 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2}$

b. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

c. $f(x) = (x - r)(x + a)$

d. $f(x) = |x|$

e. $f(x) = 5 - |x|$

4.4.2.6. ★ *Tarea, números críticos:* encuentre los números críticos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = |2x + 1|$

b. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

c. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

d. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

4.4.2.7. • *Tarea, máximos y mínimos:* encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de las funciones que están enumeradas a continuación. Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la definición de máximos y mínimos, o el criterio de la primera derivada.

a. $f(x) = x^2$ con $x \in [-1, 4]$

b. $f(x) = 12 + 4x - x^2$ con $x \in [0, 5]$

c. $f(x) = 3 + x + x^2$ con $x \in [-1, 1]$

d. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ con $x \in [-4, 0]$

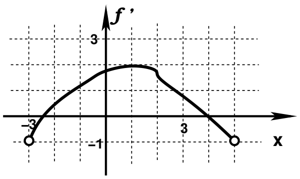


Figura 4.53. Ejercicio 4.4.2.9, derivada f'

e. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 3x-4 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$

4.4.2.8. ★ *Tarea, máximos y mínimos:* encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de las funciones que están enumeradas a continuación. Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la definición o el criterio de la primera derivada.

a. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ con $x \in [0.2, 3]$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$ con $x \in [0, 2]$

c. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ con $x \in (-2, 2]$

d. $f(x) = \ln|x^2+x+1|$ con $x \in [-1, 1]$

e. $f(x) = \sin x$ con $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

f. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ x+4 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 2x-1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

h. $f(x) = x - \ln x$ con $x \in (0, 1]$

i. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{8}}$ con $x \in [-1, 4]$

4.4.2.9. • *Tarea, máximos y mínimos:* la figura 4.53 muestra la derivada, f', de una función f.

a. ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?

b. ¿En qué valores de x hay máximos o mínimos de la función f?

4.4.2.10. ★ *Tarea, máximos y mínimos:* la figura 4.54 muestra la derivada, f', de una función f.

a. ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?

b. ¿En qué puntos f tiene máximo o mínimo local?

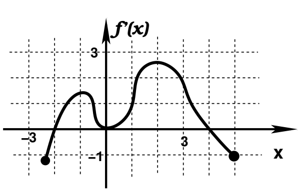


Figura 4.54. Ejercicio 4.4.2.10

4.4.3. Concavidad, trazado de curvas y criterio de la segunda derivada

La concavidad distingue funciones que "abren hacia arriba", como la parábola $f(x) = x^2$; de funciones que "abren hacia abajo", como la parábola $f(x) = -x^2$. Otra característica equivalente a concavidad hacia arriba es que las gráficas de las rectas tangentes son dibujadas por debajo de f (es decir $t(x) \leq f(x)$), y de manera análoga las rectas tangentes a las funciones cóncavas hacia abajo están por encima de la función (es decir $f(x) \leq t(x)$).

Las funciones cóncavas hacia abajo también son llamadas simplemente *cóncavas*, mientras que las funciones cóncavas hacia arriba son llamadas *convexas*. Una función puede tener segmentos que sean cóncavos hacia arriba, seguidos de otros que sean cóncavos hacia abajo.

Una función puede ser decreciente y ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. O también, siendo creciente, puede ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Dicho de otra forma: no hay relación entre ser creciente o decreciente y ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo; son condiciones independientes de las gráficas.

4.4.3.1. Definición, concavidad: sea f una función derivable en su dominio, entonces:

1. f es cóncava hacia arriba en un intervalo, si f' es creciente en este intervalo. (También llamada convexa).
2. f es cóncava hacia abajo (también llamada cóncava) en un intervalo, si f' es decreciente en este intervalo.

Hemos dicho que una función puede cambiar de concavidad. El número en que cambia de concavidad se llama número de inflexión.

4.4.3.2. Definición, número de inflexión: los números de inflexión son valores en el dominio de la función, donde la concavidad cambia. Esto puede pasar por dos condiciones, o $f''(c) = 0$, o $f''(c)$ no existe.

La definición nos ayuda a pensar en una estrategia para determinar si una función es cóncava o convexa. Pensémoslo de la siguiente manera: para hallar los intervalos de concavidad de f necesitamos averiguar los intervalos crecientes y decrecientes de f'. Pero f' es una función, luego sus intervalos crecientes y decrecientes se pueden hallar con su derivada.

4.4.3.3. Definición, cóncava hacia arriba: una función es cóncava hacia arriba en un intervalo C si allí $f''(x) > 0$.

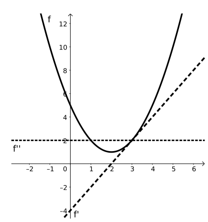


Figura 4.55. Función cóncava hacia arriba

4.4.3.4. Definición, cóncava hacia abajo: una función es cóncava hacia abajo en un intervalo C si allí $f''(x) < 0$.

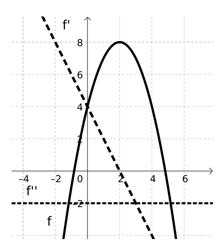


Figura 4.56. Función cóncava hacia abajo

Al principio de esta sección mencionamos que una función cóncava tiene una forma similar a la parábola $-x^2$, y que una función convexa tiene una forma similar a la parábola x^2. Pero justamente estas parábolas tienen un máximo y un mínimo respectivamente. Es por esto que la segunda derivada nos da un segundo criterio para encontrar máximos y mínimos.

4.4.3.5. Definición, criterio de la segunda derivada para extremos locales: sea f una función tal que su segunda derivada f'' es continua en un intervalo que contiene a c. Entonces:

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ (es cóncava), entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
2. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ (es convexa), entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$ la prueba no es concluyente.

Ejercicios y tareas

4.4.3.6. Ejercicio, definiciones: complete las siguientes frases. Las posibles respuestas correctas son:

- Creciente
- Decreciente
- Negativa
- Positiva
- Cóncava hacia arriba
- Cóncava hacia abajo

Sea f una función definida en un intervalo abierto (A, B).

1. Si $f' > 0$ en el intervalo, entonces f es ______________ en el intervalo.
2. Si f es cóncava hacia arriba en el intervalo, f'' es ______________ en el intervalo.
3. Si $f' < 0$ en el intervalo, f es ______________ en el intervalo.
4. Si $f'' < 0$ en el intervalo, f es ______________ en el intervalo.
5. Si f' es creciente en el intervalo, f es ______________ en el intervalo.

4.4.3.7. ★ *Tarea, máximos y mínimos:* suponga que f es continua en el intervalo $[-3, 3]$, con las siguientes propiedades:

- f solo tiene una raíz, y está en $x = 0$ (en otras palabras solo vale 0 en 0).
- f' es decreciente en todo el intervalo $(-3, 3)$.
- $f'(2) = 0$

Responda las siguientes preguntas:

1. Verdadero o falso: en el intervalo $[-3, 3]$, f tiene un valor máximo y mínimo. Explique.
2. Si f tiene un máximo, ¿dónde es? Explique por qué.
3. ¿f tiene mínimos locales?, ¿dónde? Explique por qué.

4.4.3.8. *Ejercicio, concavidad:* sean f y g dos funciones *crecientes* definidas en el intervalo $[0, 10]$. f siempre es cóncava hacia abajo, mientras que g siempre es cóncava hacia arriba.

De las siguientes afirmaciones indique si son *siempre* verdaderas, *algunas veces* verdaderas, o siempre *falsas*. No es necesario explicar.

A. Si $f'(10) > f'(0)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

B. $g'(0) < g'(10)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

C. Si $f(0) = g(0)$, $f(10) < g(10)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

4.4.3.9. *Ejercicio, concavidad:* sean f y g dos funciones *decrecientes* definidas en el intervalo $[0, 10]$. f siempre es cóncava hacia abajo, mientras que g siempre es cóncava hacia arriba.

De las siguientes afirmaciones indique si son *siempre* verdaderas, *algunas veces* verdaderas, o siempre *falsas*. No es necesario explicar.

A. Si $f'(10) > f'(0)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

B. $g'(0) < g'(10)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

C. Si $f(0) = g(0)$, $f(10) < g(10)$:

☐ siempre verdad ☐ algunas veces ☐ falso

4.4.3.10. • *Tarea, concavidad:* según la gráfica de la función f, figura 4.57, es *correcto* afirmar que:

a. f tiene un máximo absoluto en $(0, 0)$.

b. f tiene un punto de inflexión en $(-2, -2.67)$.

c. En los puntos $(-1.21, -1.53)$ y $(0.54, -0.22)$, f presenta cambio en la concavidad.

d. La función f es decreciente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(1, \infty)$.

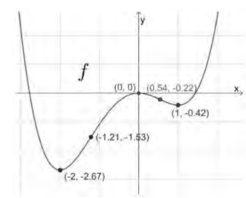


Figura 4.57. Función f relacionada con el ejercicio 4.4.3.10

4.4.3.11. • *Tarea, máximos y mínimos:* de acuerdo con la gráfica de la primera derivada de la función f, figura 4.58. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es *falsa* con respecto a f?.

A. f tiene exactamente cuatro puntos de inflexión.

B. Hay un máximo local de f en $x = 2$.

C. f no es creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.

D. f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -2)$.

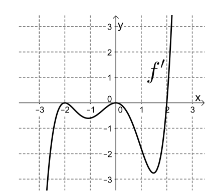


Figura 4.58. Derivada f' relacionada con el ejercicio 4.4.3.11

4.4.3.12. • *Tarea, números críticos:* clasifique todos los números críticos de las funciones que están enumeradas a continuación. Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la definición de máximos y mínimos, o el criterio de la segunda derivada.

a. $f(x) = 3x^2$

b. $f(x) = 2 + 4x - x^2$

c. $f(x) = 1 + x + x^2$

d. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$

4.4.3.13. • *Tarea, números críticos:* clasifique todos los números críticos de las funciones que están enumeradas a continuación. Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la definición de máximos y mínimos, o el criterio de la segunda derivada.

a. $f(x) = 2x - x^2$

b. $f(x) = 4x^3 - x^2$

c. $f(x) = x^2 - 2x^3$

d. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

4.4.3.14. ★ *Tarea, números críticos:* clasifique todos los números críticos de las funciones que están enumeradas a continuación. Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la técnica o los teoremas que le resulten más eficientes en cada caso.

a. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

b. $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x^4 + x^3 - x^2$

d. $f(x) = \ln|x^2 + x + 2|$

e. $f(x) = \cos x$

f. $f(x) = \ln x - x$

g. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{8}}$

4.4.3.15. ★ *Tarea, números críticos, monotonía, concavidad:* para las siguientes funciones:

I Clasifique todos los números críticos (diga si son máximos o mínimos).

II Encuentre los intervalos de monotonía.

III Encuentre los intervalos de concavidad.

Puede usar CAS para calcular derivadas, pero debe explicar su respuesta claramente. Use la técnica o los teoremas que le resulten más eficientes en cada caso.

a. $f(x) = -x + \frac{1}{x}$

b. $f(x) = 1 - x + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$

d. $f(x) = \ln|2x^2 - x + 2|$

e. $f(x) = \sin x$

f. $f(x) = \ln x - 2x$

g. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{3}}$

h. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ -x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

i. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -3x + 6 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

4.5. Aplicaciones de la derivada al aprendizaje de máquina y métodos numéricos (Newton-Raphson)

4.5.1. Función de costo en aprendizaje de máquina

> *4.5.1.1. Definición, aprendizaje de máquina:* un programa de computador aprende si a medida que adquiere experiencia con respecto a una tarea mejora su rendimiento en realizar esa tarea. (Tom Mitchell)

4.5.1.2. Ejemplo, reconocimiento de texto: los primeros programas de computador de reconocimiento de texto solo podían reconocer letras impresas. Para poder digitalizar texto escrito se entrenó a los nuevos programas con los llamados *conjuntos de entrenamiento*, que son bases de datos de imágenes de texto a mano que han sido *anotadas* por personas que han leído el texto manuscrito y han generado las correspondientes digitalizaciones. Esto ha permitido que los sistemas de enrutamiento de cartas y paquetes automaticen el direccionamiento. Para esto usan los programas para tomar el texto manuscrito y digitalizar la información relacionada con la dirección de destino; parte de este proceso se debe al aprendizaje de máquina aplicado al reconocimiento de texto.

> *4.5.1.3. Definición, aprendizaje supervisado: regresión:* en el aprendizaje de máquina supervisado ya sabemos cuál es el resultado que debemos obtener del conjunto de datos. En los problemas de regresión el modelo que estamos entrenando es un modelo continuo; es decir para diferentes valores de entrada obtenemos un número real como resultado.

4.5.1.4. Ejemplo, ¿cuánto durarás en el restaurante?: un restaurante exclusivo tiene pocas mesas y trabaja todo el día, sirviendo desayunos, almuerzos, cenas, y cócteles. La dueña ha notado que el tiempo que pasa un cliente en su restaurante depende de la edad del cliente. Las personas muy jóvenes o mayores tienden a quedarse menos tiempo, mientras que las de edad media tienden a pasar más tiempo en su restaurante. A su vez, para la dueña el tiempo óptimo que debe pasar un cliente en el restaurante varía durante el día; en horas pico preferiría que estuviesen menos tiempo para poder atender a más gente, mientras que en horas valle puede dedicarles más tiempo y atenderlos mejor.

Ella quiere tener un modelo de su clientela, que a partir de la edad del cliente (o edad promedio de un grupo de clientes) le de un estimativo del tiempo que va a pasar el cliente (o grupo) en el restaurante. En este caso la variable de entrada es una variable continua al igual que la variable de salida. El modelo es univariado de regresión.

4.5.1.5. Definición, regresión lineal de una variable: son modelos con una variable de entrada, en el que queremos tener una única variable de salida, que sea continua.

4.5.1.6. Definición, funciones de hipótesis: las funciones de hipótesis son funciones lineales de la forma:

$$y = h_\theta(x) = \theta x$$

Las diferentes funciones de hipótesis se diferencian por el valor de θ. En aprendizaje supervisado sabemos cuál es el valor de x (entrada) y el valor de y (salida). La mejor hipótesis es la que pasa más cerca de todos los puntos.

4.5.1.7. Definición, función de costo (aprendizaje de máquina): la precisión de la hipótesis se puede calcular con una función de costo. La función de costo toma un promedio de la diferencia entre los valores de la hipótesis con entradas x y la salida esperada y:

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta(x_i) - y_i\right)^2$$

Aquí m es el número de datos que tenemos, x los valores de entrada (conocidos), y los valores de salida (conocidos). Si la hipótesis entrega valores muy alejados de los valores de salida, el costo es alto; si están cerca, bajo.

La implementación de los métodos de aprendizaje de máquina requiere conceptos de álgebra lineal y programación que no se han cubierto en los cursos anteriores, pero podemos tener una intuición sobre como funciona el aprendizaje de máquina. Para ello utilizaremos el diagrama de flujo del aprendizaje de máquina que está descrito en la figura 4.59.

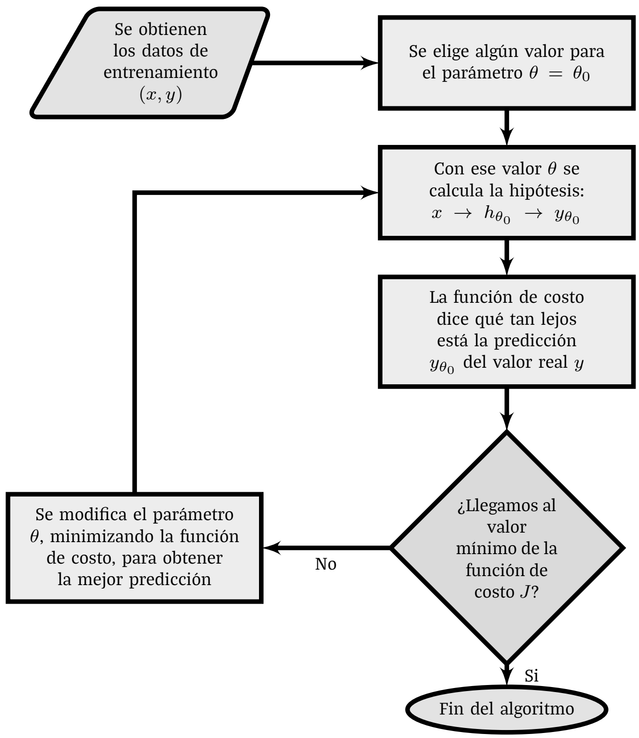


Figura 4.59. Diagrama de flujo del aprendizaje de máquina

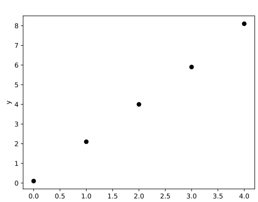


Figura 4.60. Datos de entrenamiento, son parejas (x, y) representadas aquí como puntos en el plano

Por ejemplo, supongamos que tenemos las siguientes parejas de datos de entrenamiento (x, y):

$$(0, 0.1), (1, 2.1), (2, 4), (3, 5.9), (4, 8.1)$$

Los representamos con la gráfica que se encuentra en la figura 4.60. Las diferentes hipótesis que representan estos datos son las rectas:

$$h_\theta = \hat{y} = \theta x$$

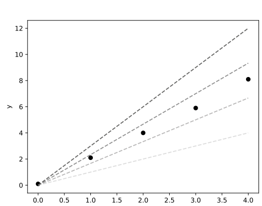


Figura 4.61. Cuatro hipótesis correspondientes a la relación entre x y y

Que se diferencian en el valor de la pendiente θ. Para cada valor x la hipótesis predice un valor $\hat{y}$; que queremos que esté cerca de y. Para los datos de entrenamiento que ya presentamos, por ejemplo, podemos tener una hipótesis con $\theta = 1$, otra con $\theta = 1.66$, otra con 2.33 y una última con $\theta = 3$, como se ve en la figura 4.61.

Queremos que el programa pueda decidir cuál de las hipótesis es mejor. Para esto calculamos la función costo para cada una de ellas, como se ve en la figura 4.62. Para elegir el mejor modelo se *minimiza la función costo*. La mejor hipótesis será la que minimice la función de costo. En este caso tenemos dos parámetros θ, correspondientes a dos funciones h_θ, a las que corresponde un valor similar de la función costo.

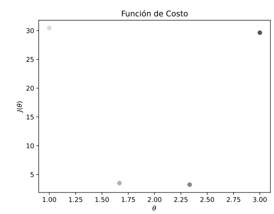


Figura 4.62. Valor de la función costo correspondiente a cada una de las hipótesis

Si, en lugar de 3 usáramos 20, las hipótesis serían las que están representadas en la figura 4.63. Y sus correspondientes costos están representados en la figura 4.64. ¿Cuál cree usted que será el valor θ que minimiza la función de costo?

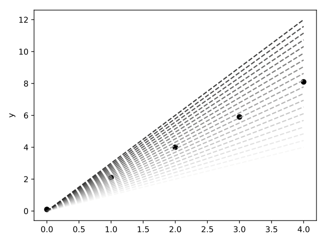


Figura 4.63. 20 diferentes hipótesis que representan la relación entre x y y

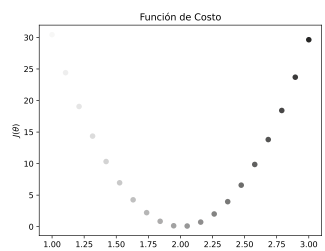


Figura 4.64. Costos correspondientes a las hipótesis representadas en la figura 4.63

En este caso el parámetro θ que minimiza la función de costo será cercano a 2, como se puede extrapolar de la figura 4.64.

4.5.2. Método de Newton-Raphson

4.5.2.1. Definición, algoritmo: un algoritmo es una sucesión específica de pasos computacionales. Cuando un algoritmo funciona repitiendo un conjunto dado de pasos una y otra vez, mediante la respuesta del paso anterior como entrada para el siguiente, el algoritmo se llama iterativo; a cada repetición se le llama iteración.

Algunos métodos numéricos para encontrar raíces son:

1. Método de Picard

2. Método de Newton-Raphson

3. Método de bisección

4. Técnica iterativa del punto fijo

5. Método de la secante

El *método de Newton-Raphson* se basa en la linealización de f en las cercanías de un valor x_0. Se usa una fórmula de recurrencia para aproximar números en el dominio que hacen que el valor funcional se acerque cada vez más a cero. Si el valor exacto donde la función se hace 0 es x^*, se comienza con un número que está cerca: x_0; representado en la figura 4.65.

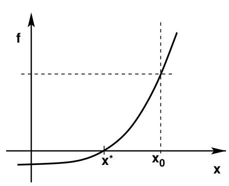


Figura 4.65. Inicio del proceso de linealización por Newton-Raphson. Se define un valor x_0, cercano a la zona donde estimamos que está el valor x^* correspondiente a la raíz que estamos buscando

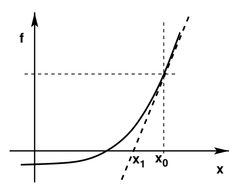


Figura 4.66. A continuación se calcula la linealización de la función en $(x_0, f(x_0))$, la recta $L_0(x)$. Parte del procedimiento de linealización por Newton-Raphson

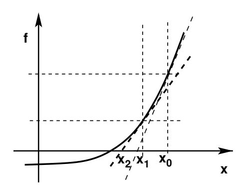


Figura 4.67. Se continúa de manera iterativa, generando nuevas rectas, cuyos intersectos con el eje x proveen de mejores aproximaciones a x^*

Allí se puede construir la linealización L_0, representada en la figura 4.66.

$$L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

A continuación encontramos el valor x_1 que corresponde al corte entre la recta L_0 y el eje x. Este valor es una mejor aproximación del valor de x^* que la primera estimación que habíamos calculado, x_0. Para ello igualamos a cero la expresión anterior.

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = (x - x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 = x_1$$

Con este valor encontramos x_1. Este valor es una mejor aproximación, pero a su vez puede ser mejorado. Para mejorarlo continuamos la aplicación iterativa del mismo procedimiento. Es decir, iteramos con la regla:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Que nos da los valores subsiguientes x_2, x_3, etc.; como se representa en la figura 4.67. Después de unas *pocas* iteraciones de la regla tendremos un *muy buen* valor de aproximación al valor x^*.

4.5.2.2. Definición, método de Newton-Raphson:

1. Especifique el número de cifras significativas que necesita, L.
2. Suponga una primera aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, llámela x_0. Puede usar una gráfica para ello.
3. Aplique la fórmula de recurrencia a x_0 para obtener x_1.
   $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   donde $f'(x_{n+1}) \neq 0$
4. Continúe de manera iterativa, obteniendo valores sucesivos para x_2, x_3, etc.
5. En lo posible use software para calcular los términos de la sucesión.
6. El proceso termina cuando dos valores sucesivos x_j y x_{j+1}, son iguales en por lo menos L cifras. Se dice que se ha obtenido la raíz con esa precisión.

4.5.2.3. Ejemplo, ceros de $x^3 - 2x - 5 = 0$: encuentre el valor o los valores reales que hacen que $x^3 - 2x - 5 = 0$. Al observar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$, que representamos en la figura 4.68 y que hemos obtenido mediante GeoGebra, advertimos que el valor $x_0 = 2$ es una buena primera aproximación al valor de la raíz. Es decir sería nuestro x_0.

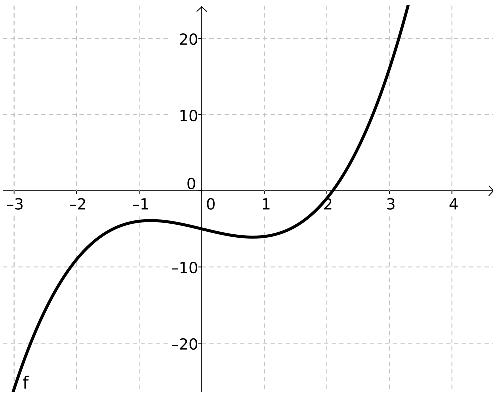


Figura 4.68. Representación de la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$, para encontrar una aproximación al valor x^* que hace que la función valga 0

Resultado de aplicar el método

$n+1$	x_n	x_{n+1}
0	2	2.1
1	2.1	2.09456812
2	2.09456812	2.09455148
3	2.09455148	2.09455148
4	2.09455148	2.09455148

Tabla 4.5. Ceros de la función $x^3 - 2x - 5 = 0$ utilizando el método de Newton. Se obtiene el valor $a = 2.09455148$, con 9 cifras significativas

Conclusión La función $f(x) = x^3 - 2x - 5$, tiene un cero en $x = 2.09455148$ con una precisión de 8 cifras decimales por lo tanto $x = 2.09455148$ es una solución de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$

4.6. Optimización

4.6.1. Problemas de optimización

Una de las razones para estudiar los máximos y mínimos (especialmente los globales) de las funciones matemáticas, consiste en las aplicaciones; por ejemplo, a una empresa le puede interesar hallar el máximo de una función que represente sus ingresos.

4.6.1.1. Definición, valor óptimo (optimización): es el "mejor" valor que toma una función en una aplicación particular, puede ser un máximo o un mínimo. Por ejemplo puede ser: el costo mínimo de producción de una empresa, la ganancia máxima, el volumen mínimo de un empaque, etc.

4.6.1.2. Definición, cantidades desconocidas (optimización): en un proceso de optimización, representan las cantidades que se busca encontrar.

4.6.1.3. Definición, función objetivo: aquella que representa la cantidad que se quiere maximizar o minimizar. Ejemplos: función de costo, de área, de volumen, etc.

4.6.1.4. Definición, restricciones: son relaciones entre las variables del problema que imponen límites a su solución. Ejemplos: la cantidad máxima de material que se debe usar al construir un objeto, cantidad mínima de objetos que se debe producir, etc.

4.6.1.5. Definición, algoritmo para resolver problemas de optimización:

1. Identifique las cantidades conocidas y desconocidas, posiblemente con la ayuda de un diagrama. Asígneles nombres y símbolos.

2. Identifique la función objetivo. Esta representa la cantidad que quiere maximizar o minimizar. Póngale un nombre específico, como S: área superficial.

3. Identifique las restricciones. Son ecuaciones o desigualdades que relacionan las variables del sistema.

4. Enuncie el problema de optimización. Usualmente de la forma: "Maximice (minimice) la función objetivo f, sujeto a las siguientes restricciones...".

5. Elimine las variables extra. Usualmente la función objetivo depende de varias variables, pero se pueden sustituir algunas en términos de otras.

6. Encuentre los máximos o mínimos de la función objetivo.

4.6.1.6. Ejemplo, optimización del volumen de una caja, partiendo de una cartulina cuadrada: usted tiene una cartulina cuadrada, de 12 cm de lado. Quiere construir la caja más grande posible, sin tapa, cortando cuadrados de la esquina de la cartulina de lado x. ¿Cuál es el valor óptimo para x?
Algoritmo:
1. Identifique cantidades desconocidas.
2. Identifique la función objetivo.
3. Identifique las restricciones.
4. Enuncie el problema de optimización.
5. Elimine variables extra.
6. Encuentre los máximos y mínimos.

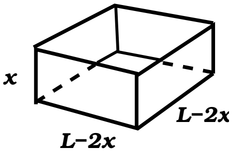


Figura 4.69. Diagrama de la caja correspondiente al ejemplo 4.6.1.6. La longitud x es desconocida

Solución
1.Parámetro: L=12 cm.

Cantidades desconocidas: lado del cuadrado que hay que cortar: x. Se representa en la figura 4.70.

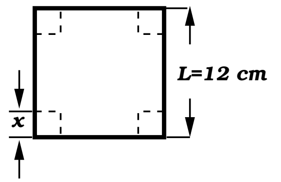


Figura 4.70. Para construir la caja se cortan cuadrados de lado x de las esquinas de la cartulina cuadrada. El lado original de la cartulina tiene longitud de $12\ cm$

2. Función objetivo: es el volumen de la caja. Tendrá una base de lado $12-2x$ y una altura de x, representada en la figura 4.71. Luego el volumen es: $V(x) = x(12-2x)^2$.

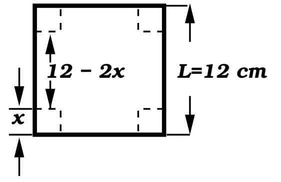


Figura 4.71. Al definir el lado del cuadrado que se corta de las esquinas con el valor de x, la base cuadrada de la caja ahora tiene lado $12-2x$, como se ve aquí

3. Restricciones: el volumen que buscamos es un número positivo: $V_{ptimo} > 0$. Además el lado del cuadrado que se corta, x debe cumplir: $0 < x < 6$.
4. Problema matemático: encuentre el valor máximo de la función $V(x) = x(12-2x)^2$ *en el intervalo* $x \in (0,6)$.
5. Variables extra: no hay.
6. Máximos y mínimos: la solución es:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= (12-2x)^2 + 2x(12-2x)(-2) && (4.20)\\ &= (12-2x)(12-2x-4x) && (4.21)\\ &= (12-2x)(12-6x), && (4.22) \end{aligned}$$

Puntos críticos: $x_{c1} = 6$, no pertenece al dominio de la función en el modelo $x_{c2} = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= -2(12-6x)+(12-2x)(-6) && (4.23) \\ &= -24+12x-72+12x && (4.24) \\ &= -96+24x && (4.25) \end{aligned}$$

Como $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=2} < 0$, x_{c2} es un máximo. Las funciones V, V' y V'' se representan en la figura 4.72.

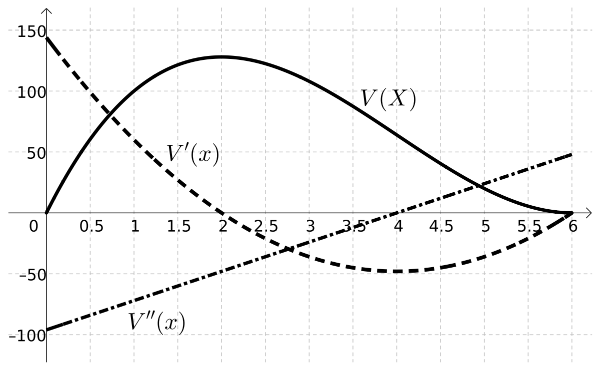


Figura 4.72. Función V, su derivada V', y su segunda derivada V''; correspondientes al ejemplo 4.6.1.6

4.6.1.7. Ejercicio, ganancia: con cierta materia prima se pueden hacer dos productos, A y B. Por cada unidad de materia prima usada en hacer A, se obtiene una ganancia del doble del número de unidades de materia prima. Por cada unidad usada en hacer B se obtiene una ganancia igual al cuadrado del número de unidades de materia prima.

Si se tienen 100 unidades de materia prima, ¿cuáles son las cantidades que se deben usar en cada producto para tener una mayor ganancia?

I ¿Cuáles son las variables?

A. La cantidad total de materia prima.

B. El número de objetos de A y B.

C. El número de unidades de materia prima usadas respectivamente en A y en B.

D. El valor de venta de A y B.

E. La cantidad de materia prima y el número de objetos de A
y de B.

II ¿Cuál es la función objetivo?

A. La cantidad total de materia prima.

B. El número de objetos de A y B.

C. x, el número de unidades usadas en A, y y, el número de unidades usadas en B.

D. La ganancia obtenida por los dos productos.

E. La cantidad de materia prima y el número de objetos de A
y de B.

III ¿Cuál es la expresión funcional de la función objetivo?

A. $G(x) = 2x$

B. $G(y) = y^2$

C. $G(x, y) = 2x + y^2$

D. $x + y = 100$

E. $G(x, y) = x + y$

IV ¿Cuál es la función de restricción?

A. $G(x, y) = 2x + y^2$.

B. $x + y = 100$.

C. No hay función de restricción.

V Enuncie el problema de optimización.

Respuesta en la nota al pie: [7]

4.6.1.8. Ejercicio, minimizar material para una caja: una caja de base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan la cantidad de material que debe utilizarse.

I ¿Cuáles son las variables?

A. Lado de la base y alto de la caja.

B. Volumen de la caja.

[7] Maximice la función $G(x, y) = 2x + y^2$, con $x > 0$, $y > 0$, sujeto a la restricción $x + y = 100$.

C. Área de los lados de la caja.

D. Perímetro de la base de la caja.

II El siguiente es un diagrama esquemático de la caja:

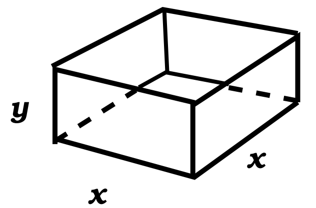


Figura 4.73. Caja sin tapa correspondiente al ejercicio 4.6.1.8

A. Sí.

B. No.

III ¿Cuál es la función objetivo?

A. Un volumen, el volumen de la caja.

B. Un área, el área superficial de la caja.

C. Un precio, el precio de la caja.

D. Una longitud, la longitud de las aristas de la caja.

IV ¿Cuál es la expresión funcional de la función objetivo?

A. $V = x^2y$

B. $A_l = 4xy$

C. $A_b = x^2$

D. $A = 4xy + x^2$

E. $L = 4x + 4y$

V El problema tiene una restricción y es:

A. El volumen de la caja.

B. El material a usarse para hacer la caja.

C. El área lateral de la caja.

D. El área de la base de la caja.

VI Enuncie el problema de optimización.

VII Al sustituir la restricción en la función objetivo se obtiene la función:
$$A(x) = x^2 + \frac{128000}{x}$$

A. Verdadero.

B. Falso.

VIII La derivada de $A(x)$ con respecto a x es:

A. $\frac{dA}{dx} = \frac{2x^3+128000x-128000}{x^2}$

B. $\frac{dA}{dx} = -128000x^2 + 2x$

C. $\frac{dA}{dx} = -128000 + 2x$

D. $\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{128000}{x^2}$

E. $\frac{dA}{dx} = x^2 + \frac{128000}{x}$

IX Los valores críticos para este caso son:

A. 1 y 0

B. 0 y 128000

C. 2 y 128000

D. 40 y 0

Respuesta en la nota al pie: [8]

4.6.1.9. Ejercicio, cartel: usted quiere elaborar un cartel que tenga 2 m^2 de área total, con márgenes superior e inferior de 2 cm y márgenes laterales de 1 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del cartel que hacen que la superficie a imprimir sea máxima?

I) ¿Cuál es la función objetivo?

A. Perímetro de la parte impresa.

B. Área de la parte impresa.

C. Largo de la parte impresa.

D. Costo del cartel.

II) ¿Cuáles son las variables?

A. Área del cartel.

B. Perímetro de la parte impresa.

[8] Minimice la función $A(x, y) = 4xy + x^2$, sujeto a la restricción $yx^2 = 32000$.

C. Medida de las márgenes.

D. Dimensiones del cartel.

III) Las restricciones son:

A. Área del cartel y medida de las márgenes.

B. Perímetro de la parte impresa.

C. Costo del cartel.

D. Dimensiones del cartel.

IV) Una posible representación gráfica del problema es:

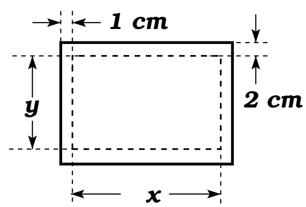


Figura 4.74. Diagrama que representa las variables del ejercicio del cartel

Es decir:

- x: ancho de la parte impresa.
- y: alto de la parte impresa.
- $A(x, y)$: área impresa.

V) ¿Cuál es la expresión funcional de la función objetivo?

A. $A(x, y) = x(y - 2)$

B. $A(x, y) = (x + 2)(y + 4)$

C. $A(x, y) = xy$

D. $A(x, y) = (x - 2)(y - 4)$

E. $A(x, y) = (x - 4)(y - 2)$

VI) La función de restricción:

$$(x + 2)(y + 4) = 20000$$

VII) Enuncie el problema de optimización.

VIII) Las dimensiones que optimizan el área impresa son:

A. $98 \times 196\, cm$.

B. $98 \times 196\, m$.

C. $2 \times 4\, cm$.

D. $100 \times 200\, cm$.

E. $200 \times 100\, m$.

F. $8 \times 16\, cm$.

Respuesta en la nota al pie: [9]

Ejercicios y tareas

4.6.1.10. • *Tarea, optimización:* sea:

$$A(x, y) = xy\,;\, x > 0\,;\, y > 0$$

Sujeta a la restricción:

$$y = 12 - x^2$$

¿Qué valor de x maximiza el valor de la función A?

4.6.1.11. • *Tarea, optimización:* sea:

$$V(x, y) = x^2 y\,;\, x > 0\,;\, y > 0$$

Sujeta a la restricción $x^2 + 4xy = 100$ ¿Qué valor de x maximiza el valor de la función V?

4.6.1.12. • *Tarea, optimización:*

a. Encuentre dos números x, y, tales que: $x - y = 10$ que minimicen la función: $A(x, y) = xy$

b. Encuentre dos números x, y, con $x \geq 0$, $y \geq 0$, tales que: $x + y = 10$ que maximicen la función: $A(x, y) = xy$.

c. Encuentre dos números x, y, con $x \geq 0$, tales que: $(x + 1)y = -3$ que minimicen la función: $L(x, y) = x + y$.

d. Encuentre dos números x, y, tales que: $xy = 10$ que minimicen la función: $L(x, y) = x - y$

[9] Maximice el área total de un letrero $A(x, y) = xy$, sujeto a la restricción $(x+2)(y+4) = 20000$.

e. Encuentre dos números x, y, tales que: $x + y = 10$ que minimicen la función: $A(x, y) = x^2 + y^2$

f. Encuentre dos números x, y, tales que: $2x + 2y = 10$ que maximice la función: $A(x, y) = xy$

g. Encuentre dos números x, y, tales que: $xy = 10$ que minimice la función: $P(x, y) = 2x + 2y$

Solución en la nota al pie[10]

4.6.1.13. • *Tarea, enunciados de optimización:* cada uno de los siguientes problemas representa un ejercicio de optimización con restricción que está enunciado en el ejercicio 4.6.1.12. ¿Cuál es?

a. Encuentre las coordenadas de un punto tal que su distancia al origen es mínima y la suma de sus coordenadas es 10.

b. Encuentre dos números tales que su resta sea 10 y que su producto sea mínimo.

c. El área de un rectángulo es 10. Encuentre las dimensiones que minimizan su perímetro.

d. La cuarta parte del área de un rectángulo es 10. Encuentre las dimensiones que minimizan su perímetro.

e. La cuarta parte del área de un rectángulo es 10. Encuentre las dimensiones que minimizan su perímetro.

f. Encuentre dos números tales que su suma sea 10 y que su producto sea mínimo.

g. El perímetro de un rectángulo es 10. Encuentre las dimensiones que maximizan su área.

[10] La función objetivo es $A(x, y) = xy$, la restricción $x + y = 10$. Como tanto x como y son positivos, entonces $x \in [0, 10]$ y $y \in [0, 10]$. Reemplazando la restricción en la función objetivo tenemos: $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$, con $x \in [0, 10]$. Como está definida en un intervalo, los primeros candidatos son los extremos, $x = 0$, $x = 10$. La derivada es: $A'(x) = 10 - 2x$, por lo tanto tenemos un número crítico estacionario en $x = 5$. La segunda derivada es $A''(x) = -2$, entonces el punto estacionario será un máximo. Evaluando la función tenemos: $A(0) = 0$, $A(10) = 0$, $A(5) = 25$. Los valores que maximizan son $x = 5$, $y = 5$. Despejando de la restricción: $y = \frac{-3}{x+1}$. Entonces la función objetivo es: $L(x) = x - \frac{3}{x+1}$. La derivada es $L'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1)^2}$. Tendríamos un crítico singular en -1, pero el dominio está en los mayores o iguales a cero, y la función no está definida allí, luego no es punto máximo o mínimo. No hay números críticos estacionarios, ya que tendrían que cumplir $(x + 1)^2 = -3$, lo que no es posible, porque al lado izquierdo es un número positivo. Entonces el único candidato es 0, extremo del dominio. $L(0) = -3$, $L(1) = -1/2$, entonces en 0 tenemos el mínimo de la función.

4.6.1.14. • *Tarea, optimización:* usando el algoritmo 4.6.1.5 paso a paso, solucione los siguientes problemas:

a. Un agricultor tiene 600 m lineales de malla para dividir un terreno en tres partes iguales (cuadrados o rectángulos). ¿Cuáles son las dimensiones que maximizan el área del terreno?

b. Se dispone de $12000\, cm^2$ de material para construir una caja con base cuadrada y sin tapa. ¿Cuál es el máximo volumen de la caja?

4.6.1.15. ★ *Tarea, optimización:* usando el algoritmo 4.6.1.5 paso a paso, solucione los siguientes problemas:

a. Un contenedor de almacenamiento, con forma de paralelepípedo rectangular, sin tapa, debe tener 100 m^3 de volumen. La longitud de la base debe ser el doble del lado de la base. El material cuesta 10000 por metro cuadrado para la base y 6000 por metro cuadrado para los lados. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo y el costo mínimo.

b. Halle el punto sobre la función $\sqrt{x}$ más cercano al punto $(1, 0)$.

c. Halle el punto sobre la función cos x más cercano al origen.

d. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo isósceles más grande que cabe en una circunferencia de radio R?

e. Un alambre mide 100 m. Se corta y se forman dos piezas, un cuadrado y un triángulo equilátero, no sobra alambre. ¿Cuáles son las dimensiones de las figuras geométricas que maximizan su área?

f. Un alambre mide 100 m. Se corta y se forman dos piezas, un cuadrado y un triángulo equilátero, no sobra alambre. ¿Cuáles son las dimensiones de las figuras geométricas que minimizan su área?

Referencias

Arya, J., Lardner, R. W., y Mercado, V. H. I. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Pearson Educación. https://books.google.com.co/books?id=pWZPswEACAAJ

Bloomberg Línea. (2022). Precio del acero y viviendas de interés. https://www.bloomberglinea.com/2022/04/28/precio-del-acero-haria-inviable-construir-viviendas-de-interes-social-en-colombia/

Capitalcolombia.com. (2022). Precio del Dólar en Colombia en el año 2022. https://www.capitalcolombia.com/index.php?sec=trm_precio_dolar_en_colombia&pag=ano&consulta=2022

Castro Martínez, E., y Castro Martínez, E. (1997). Representaciones y modelización. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 95-124.

Edwards, C. (2012). *The Historical Development of the Calculus*. Springer New York. https://books.google.com.co/books?id=ilrlBwAAQBAJ

European Centre for Disease Prevention and Control. (2020). Downloadable Tables: Antimicrobial consumption - Annual Epidemiological Report for 2020. https://www.ecdc.europa.eu/en/publications-data/downloadable-tables-antimicrobial-consumption-annual-epidemiological-report-2020

Haeussler, E., Paul, R., Murrieta, J., y Wood, R. (2015). *Matemáticas para administración y economía*. Pearson Educación. https://books.google.com.co/books?id=I0FkjwEACAAJ

Investing.com. (2022a). Datos históricos NCH. https://es.investing.com/equities/nutresa-historical-data

Investing.com. (2022b). S&P 500 datos históricos. https://es.investing.com/indices/us-spx-500-historical-data

Luque, B. (2019). Monstruos no derivables. *Investigación y Ciencia*, *508*, 90-93.

Orlin, B. (2019). *Change Is the Only Constant: The Wisdom of Calculus in a Madcap World*. Running Press. https://books.google.com.co/books?id=SayNDwAAQBAJ

Stewart, J., y Pozo, V. G. (2002). *Cálculo: trascendentes tempranas*. Thomson Learning México.

Strogatz, S. (2019). *Infinite powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Eamon Dolan Books.

Strogatz, S. H. (2012). *The Joy of x: a Guided Tour of Math, from one to Infinity*. Houghton Mifflin Harcourt.

Tan, S. (2011). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida*. Cengage Learning. https://books.google.com.co/books?id=b5o7MwEACAAJ

Thomas, G. B., y Weir, M. D. (2005). *Cálculo: una variable*. Pearson Educación.

WHO - collaborating Centre for Drug Statistics Methodology. (2020). Use of ATC/DDD. https://es.investing.com/indices/us-spx-500-historical-data

Índice de materias

algoritmo, 217
algoritmo para resolver problemas de optimización, 221
algunas funciones continuas en los reales, 90
algunas funciones continuas en su dominio, 90
algunas unidades dependientes en la dinámica, 143
aprendizaje de máquina, 214
aprendizaje supervisado: regresión, 214
aproximación de f mediante L, 164
asíntotas horizontales, 80
asíntotas verticales, 83

cambio en una función, 169
candidatos a extremos relativos: extremos de un intervalo, 199
candidatos a extremos relativos: valores críticos estacionarios, 199
candidatos a extremos relativos: valores singulares, 200
cantidades desconocidas (optimización), 221
CAS de GeoGebra en línea, 156
cinemática, 184
clasificación de continuidad según su dominio, 86
clasificación de discontinuidad según la forma de la gráfica, 89
concavidad, 207
condición de derivabilidad de una función f en $x = a$, 116
continuidad de polinomios y funciones racionales, 90
continuidad de productos y cociente de funciones, 89
continuidad en un intervalo, 85
costo marginal, 191
criterio de la primera derivada, 202
criterio de la segunda derivada para extremos locales, 209

cóncava hacia abajo, 208
cóncava hacia arriba, 208

definir las ecuaciones diferenciales, 144
derivada de $f(x) = ax^r$, 124
derivada de la función f en el punto a, 116
derivada de la función f respecto a x, 118
derivada de una constante, 120
derivada de una función exponencial, 133, 135
derivada de una función exponencial compuesta, 133
derivada de una función exponencial natural, 135
derivada de una función logarítmica y logarítmica natural, 136
derivada de una función logarítmica y logarítmica natural compuesta, 136
derivadas de funciones trigonométricas, 137
diferenciales, 168
discontinuidad removible, 87

ecuación de la recta para un punto conocido (x_0, y_0), 36
elasticidad de la demanda, 173
estimar un límite numéricamente, 66
extremos relativos, 198, 199

formas indeterminadas, 70
formas indeterminadas para las que el límite posiblemente existe, 70
funciones de hipótesis, 215
Función, 25
función afín, 34
función constante, 29
función continua, 85
función costo, 190
función cuadrática, 44
función de costo (aprendizaje de máquina), 215
función lineal, 34
función lineal (segunda definición), 35
función objetivo, 221
función polinomial, 34

Gottfried Wilhelm Leibniz, 26

incertidumbre porcentual, 172
incertidumbre relativa, 172
incremento o variación, 107

límite algebraico, 72
límite de una función, 59
límite de una función contra valor funcional, 60
límite del polinomio $P(x)$ en c, 69
límite en $x = c$ de la función $y(x) = x$, 68
límite infinito, 81
límite menos infinito, 81
límite por la derecha de una función, 58
límite por la izquierda de una función, 59
límites en el infinito, 80

límites para funciones definidas en un intervalo, 61

modelo cuadrático, 184
modelo exponencial continuo, 185
modelo exponencial discreto, 186
modelo lineal, 183
modelo sinusoidal, 188
máximo relativo, 198
método de Newton-Raphson, 219
mínimo relativo, 198

notación de intervalos, 30
número de inflexión, 207

pendiente, 35
principio del infinito, 57
propiedades de los límites, 61
proporcionalidad, 183

razón de cambio promedio del costo con respecto al número de unidades, 190
razón media de cambio o tasa media de cambio, 110
regla de la cadena: si $y = f(u)$ y además $u = h(x)$ entonces:, 130
regla para encontrar la derivada de un cociente de funciones. , 128
regla para encontrar la derivada de una función multiplicada por una constante, 125
regla para encontrar la derivada de una suma o resta de funciones, 125
regla para encontrar la derivada del producto de dos funciones, 128
regresión lineal de una variable, 215
restricciones, 221

serie de Taylor, 168

técnica de l'Hôpital, 91

unidades de las derivadas, 142
unidades de potencia, 143
unidades dependientes en la cinemática, 143

valor óptimo (optimización), 221
vecindad, 60

¿qué unidades tiene una cantidad?, 142

Sobre los autores

Luis Miguel Cabrera González

Autor del capítulo 1: “Precálculo y funciones”.

Doctorante en Educación, magíster en Educación a Distancia, magíster en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Especialista en Computación para la Docencia. Especialista en Informática y Multimedios, especialista en Ambientes Virtuales de Aprendizaje, especialista en Estadística Aplicada. Licenciado en Matemáticas y Física (USCO). Docente investigador de la Escuela Superior de Administración Pública (ESAP) a nivel de pregrado y maestría.

Director de tesis de maestría y pregrado. Asesor en aplicaciones TIC en el campo educativo. Diseño y desarrollo de cursos virtuales en ambientes virtuales de aprendizaje (AVA). Implementación de software propietario y libre en el aprendizaje de las ciencias naturales y exactas. Ha trabajado en el área de administración y diseño de plataformas educativas virtuales. Ponente en eventos nacionales e internacionales. Ha publicado artículos y unidades didácticas.

Correo electrónico: luis.cabrera@esap.edu.co

David Julian Molina Beltran

Autor del capítulo 3: “La derivada”.

Licenciado en Física de la Universidad Distrital; magíster en Física y doctor en Ciencias-Física enfocado en el estudio de sistemas ligados por interacción fuerte de la Universidad Nacional de Colombia.

Actualmente se encuentra interesado en la investigación de la enseñanza de la estadística y de las matemáticas en administración; en métodos numéricos y en sistemas ligados. Al día de hoy se encuentra vinculado a la Escuela Superior de Administración Pública como profesor asociado de Matemáticas y Estadística. Correo electrónico: davidj.molina@esap.edu.co.

Gabriel Villalobos Camargo

Autor de los capítulos 2: "Infinito, límites y continuidad" y 4: "Aplicaciones de las derivadas".

Doctor en Ciencias-Física de la Universidad Nacional de Colombia en el campo de Mecánica Estadística de Fracturas. Ha sido investigador posdoctoral en la Universidad de Twente, en Países Bajos, y profesor universitario. Sus intereses de investigación están en el área del Modelado Computacional de Sistemas Complejos, Investigación en Docencia Universitaria, los Métodos de Aprendizaje de Máquina y la Ciencia de Datos. Sus publicaciones más recientes son: "Erradicación forzosa vs. erradicación voluntaria de cultivos de hoja de coca: modelado basado en agentes", y "The Calculus Concept Inventory Applied to the Case of Large Groups of Differential Calculus in the Context of the Program: 'Ser Pilo Paga' in Colombia." Al tiempo de escritura del presente libro, es profesor titular en la Escuela Superior de Administración Pública (ESAP) para el área de Ciencia de Datos. Correo electrónico: gabriel.villalobos@esap.edu.co

Créditos de las tablas y figuras

Autoría de las figuras.

- Gabriel Villalobos Camargo, figuras: 1, 1.2, 1.3, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.52, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11,2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16,2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.45, 4.46, 4.47, 4.48, 4.49, 4.52, 4.50, 4.51, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62, 4.63, 4.64, 4.65, 4.66, 4.67, 4.68, 4.69, 4.70, 4.71, 4.72, 4.73, 4.74
- Luis Miguel Cabrera González, figuras: 1.1, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33, 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.53, 1.54, 1.55, 1.56, y aquellas que aparecen en la tabla 1.6.
- David Julian Molina Beltran, figuras: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15b, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18
- Las figuras 2.1 y 2.2 son adaptaciones de la prueba de la pizza, de (S. Strogatz, 2019).
- Las figuras 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18 son impresiones de pantalla de GeoGebra, reproducidas con permiso para su uso no comercial.
- Las figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23 son impresiones de pantalla de GeoGebra para Android, reproducidas con permiso para su uso no comercial.

Escribimos el texto usando LaTeX. Terminamos el 29 de julio de 2024. Para controlar las versiones del documento, usamos el sistema de control de versiones Mercurial (https://www.mercurial-scm.org/about).

Matemáticas I: Precálculo y cálculo diferencial con aplicaciones a las ciencias administrativas y económicas hace parte de la Colección Didáctica. Para su composición se usaron fuentes de la familia Bagatela y un formato de 21 cm × 24 cm. Su cuidado estuvo a cargo de Editorial ESAP, sello editorial de la Escuela Superior de Administración Pública, y se imprimió en la Imprenta Nacional de Colombia.

Otros títulos de la ESAP

LA ESAP LE PROPONE AL PAÍS

La simbología de la ESAP

William Guillermo Jiménez (2024)

COLECCIÓN DIDÁCTICA

Gestión de los recursos físicos: Herramientas básicas de adquisición y planeación

Javier Enrique de la Hoz Mercado (2023)

COLECCIÓN SUPERIOR

Tipologías y rasgos del constitucionalismo latinoamericano en perspectiva de los derechos humanos: El canon hermenéutico en el Estado convencional

Adrian Alexander Zeballosf-Cuathin (2023)

Matemáticas I hace parte de la renovación curricular que está adelantando la Escuela Superior de Administración Pública desde el 2017, cuyos resultados se han materializado en la Colección Didáctica. Con este libro, los autores aportan un recurso didáctico para estudiantes y profesionales de ciencias administrativas y económicas, que busca proporcionar una base sólida en matemáticas, con aplicaciones directas en contextos reales. Esta publicación no solo pretende fortalecer el conocimiento disciplinar, sino también fomentar el pensamiento cuantitativo crítico, indispensable para la toma de decisiones estratégicas.

ISBN 978-958-609-161-9